CÁLCULO L1 — NOTAS DA QUINTA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

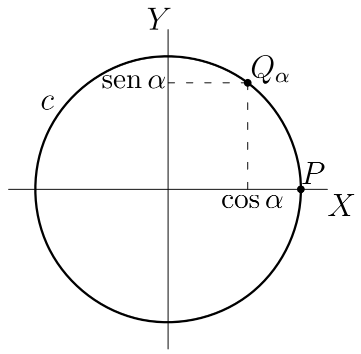
RESUMO. Iniciamos a aula definindo as funções trigonométricas e estabelecendo algumas de suas propriedades básicas. A seguir, calcularemos um limite fundamental para a obtenção da derivada da função seno. Por fim, chegaremos a derivada da função cosseno.

1. Funções trigonométricas

Iremos definir as funções seno e cosseno de um ângulo que mede α radianos. No plano cartesiano, seja c uma circunferência de raio 1 com centro na origem e seja P o ponto de coordenadas $(1,0)$. Iniciando em P, percorra um arco na circunferência de comprimento $|\alpha|$ no sentido anti-horário, quando $\alpha \geq 0$, ou no sentido horário, quando $\alpha < 0$, e seja Q o ponto terminal deste arco. Diremos que as coordenadas do ponto Q são $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Isto é,

- O seno do ângulo medindo α radianos é igual a ordenada do ponto Q.
- O cosseno do ângulo medindo α radianos é igual a abscissa do ponto Q.

Como o ponto Q depende da medida α do ângulo, representa-lo-emos por Q_α para enfatizar esta dependência. Veja a figura a seguir.



Dois ângulos, medindo α e β radianos, são ditos **congruentes** quando $Q_\alpha = Q_\beta$. Isto é, $\alpha - \beta$ é um múltiplo inteiro de 2π ou seja

$$\alpha - \beta = 2k\pi, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

Conseqüentemente ângulos congruentes possuem o mesmo seno e cosseno. Portanto, para todo número real α e número inteiro k, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) &= \operatorname{sen}\alpha \\ \cos(\alpha + 2k\pi) &= \cos\alpha \end{aligned} \tag{2}$$

Como $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ são as coordenadas do ponto Q_α que pertence à circunferência de raio 1 e centro na origem, cuja equação é $X^2 + Y^2 = 1$, temos a seguinte relação fundamental

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{3}$$

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

Mais ainda,

$$
\begin{aligned}
-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1 \\
-1 \leq \cos \alpha \leq 1
\end{aligned} \tag{4}
$$

Note que a ordenada de Q_α coincide com a abscissa de $Q_{\alpha-\frac{\pi}{2}}$ porque Q_α é obtido a partir de $Q_{\alpha-\frac{\pi}{2}}$ após uma rotação do plano de $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário tendo a origem como centro. Esta rotação leva o eixo das abscissas no das ordenadas. Logo

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \tag{5}$$

Esta rotação leva o eixo das ordenadas no das abscissas, com a orientação invertida, e daí

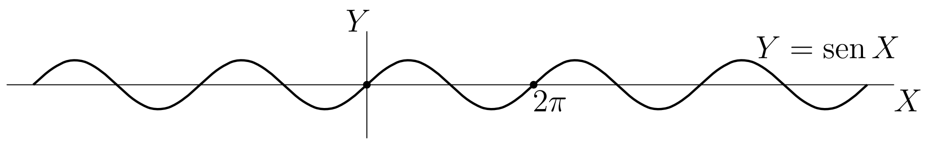
$$\cos \alpha = -\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \tag{6}$$

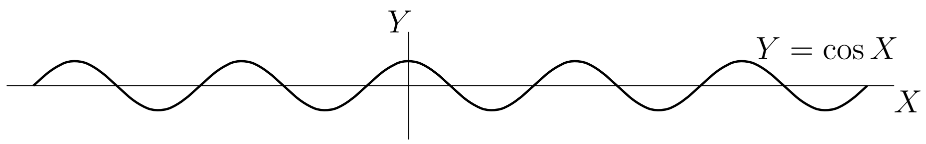
Como Q_α e $Q_{-\alpha}$ são pontos simétricos com relação ao eixo das abscissas, temos que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} \alpha &= -\operatorname{sen}(-\alpha) \\
\cos \alpha &= cos(-\alpha)
\end{aligned} \tag{7}
$$

Exercício 1. *Os pontos Q_α e $Q_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ são simétricos com respeito a reta de equação $Y = X$. Quais identidades para o* $\operatorname{sen}\alpha$ *e* $\cos\alpha$*, similares as listadas em* (7)*, podem ser obtidas utilizando esta simetria?*

É possível afirmar, a partir de (3) e do cálculo de alguns de seus valores, que as funções $\operatorname{sen} X$ e $\cos X$ possuem período igual a 2π. Portanto, o gráfico de qualquer uma destas funções é obtido pela repetição do seu gráfico no intervalo $[0, 2\pi]$. De (5), concluímos que o gráfico de $\operatorname{sen} X$ é obtido a partir do de $\cos X$ após uma translação horizontal de $\frac{\pi}{2}$ para a direita. Nas figuras seguintes, ilustramos os gráficos destas funções.





Salientamos que os valores máximo e mínimo assumidos por estas funções são 1 e −1. De (7), temos que $\operatorname{sen} X$ é uma funão ímpar e $\cos X$ é uma função par.

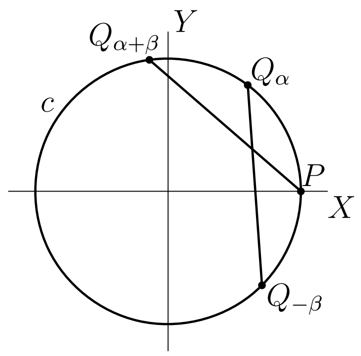
Para quaisquer números reais α e β, estabeleceremos que

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \tag{8}$$

Considere os pontos $Q_{\alpha+\beta}, Q_\alpha, P$ e $Q_{-\beta}$ em c. Ao realizarmos uma rotação de β radianos no sentido horário com centro na origem, o ponto $Q_{\alpha+\beta}$ é levado no ponto Q_α e ponto P é levado no ponto $Q_{-\beta}$. Logo o segmento $Q_{\alpha+\beta}P$ é levado no segmento $Q_\alpha Q_{-\beta}$ e daí

$$\overline{Q_{\alpha+\beta}P} = \overline{Q_\alpha Q_{-\beta}}$$

Veja ilustração a seguir.



Substituindo as coordenadas dos $Q_{\alpha+\beta}, P, Q_\alpha$ e $Q_{-\beta}$, que são respectivamente

$$(\cos(\alpha+\beta), \operatorname{sen}(\alpha+\beta)), (1,0), (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \text{ e } (\cos(-\beta), \operatorname{sen}(-\beta)) = (\cos\beta, -\operatorname{sen}\beta)$$

com a igualdade seguindo de (7), na fórmula da distância entre pontos, chegamos à

$$\sqrt{(\cos(\alpha+\beta)-1)^2 + (\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-0)^2} = \sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha-(-\operatorname{sen}\beta))^2}$$

Elevando ambos os membros desta igualdade ao quadrado, temos que

$$(\cos(\alpha+\beta)-1)^2 + \operatorname{sen}^2(\alpha+\beta) = (\cos\alpha-\cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta)^2$$

Esta identidade pode ser transformada em

$$\begin{aligned}[\cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) + 1] + \operatorname{sen}^2(\alpha+\beta) = {} & [\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta] \\ & + [\operatorname{sen}^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta]\end{aligned}$$

Reagrupamos esta relação como

$$\begin{aligned}[\cos^2(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)] + 1 - 2\cos(\alpha+\beta) = {} & [\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha] + [\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta] \\ & - 2[\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta]\end{aligned}$$

Utilizando (3) três vezes, concluímos que

$$1 + 1 - 2\cos(\alpha+\beta) = 1 + 1 - 2[\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta]$$

Note que (8) segue imediatamente desta igualdade.

Vamos estabelecer uma relação para o seno da soma similar a do cosseno. Por (5),

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos\left((\alpha+\beta) - \frac{\pi}{2}\right)$$

que pode ser reescrita como

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos\left(\alpha + \left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Por (8), temos que

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Aplicando (5) e (6), concluímos que

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos\alpha\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha(-\cos\beta)$$

Conseqüentemente

(9) $$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

O seno da diferença é dado por

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \tag{10}$$

De fato, por (9),

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha + (-\beta)) = \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta)$$

e (10) segue de (7). De maneira análoga, temos que

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \tag{11}$$

Exercício 2. *Decida quais das seguintes identidades são válidas para todos os números reais α:*

(i) $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$
(ii) $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$
(iii) $\cos(2\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$
(iv) $\operatorname{sen}(3\alpha) = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$

Subtraindo (10) de (9), obtemos que

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Se fizermos $A = \alpha + \beta$ e $B = \alpha - \beta$, então

$$\operatorname{sen}A - \operatorname{sen}B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right) \tag{12}$$

porque

$$A + B = 2\alpha \quad \text{e} \quad A - B = 2\beta$$

A expressão (12), que é a diferença de dois senos, será utilizada para o cálculo da derivada da função seno.

Exercício 3. *Encontre uma expressão para:*

(i) *a soma de dois senos;*
(ii) *a diferença de dois cossenos; e*
(iii) *a soma de dois cossenos.*

2. Um limite fundamental

Nesta seção estabeleceremos que

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1 \tag{13}$$

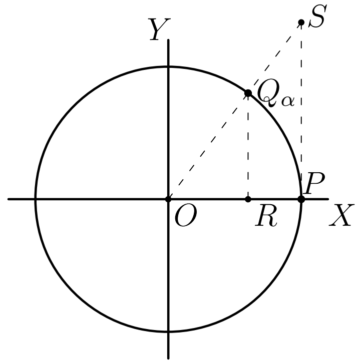
Este limite é fundamental para o cálculo da derivada da função seno e conseqüentemente das demais funções trigonométricas. Como

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{(-\alpha)}$$

será suficiente concluir que

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1 \tag{14}$$

Como α se aproxima de 0 por valores maiores que 0, vamos assumir que α não é muito grande. Isto é, vamos supor que α está no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Seja Q_α como definido na seção anterior. Logo é o ponto de coordenadas $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Note que Q_α está no primeiro quadrante. Denotamos por O a origem do sistema cartesiano. Seja S o ponto pertencente a interseção da reta que contém O e Q_α com a reta passando por P e perpendicular ao eixo das abscissas. Seja R o ponto com coordenadas $(\cos\alpha, 0)$. Veja a ilustração a seguir.



Considere as seguintes regiões do plano:

F_1 é o triângulo retângulo ORQ_α cuja área A_1 é a metade do produto do comprimento de seus catetos OR e RQ_α. Portanto, $2A_1 = \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha$.

F_2 é o setor circular OPQ_α cuja área A_2 é a metade do produto do comprimento do arco PQ_α pelo raio OP. Logo $2A_2 = \alpha$.

F_3 é o triângulo retângulo OPS cuja área A_3 é a metade do produto do comprimento de seus catetos OP e PS. Conseqüentemente $2A_3 = \overline{PS}$.

Como F_1 está contida propriamente em F_2 e F_2 está contida propriamente em F_3, temos que

$$A_1 < A_2 < A_3$$

e daí

$$\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha < \alpha < \overline{PS} \tag{15}$$

Necessitamos encontrar uma expressão para $\overline{PS}$ em termos de α. Como os triângulos ORQ_α e OPS são semelhantes, temos que

$$\frac{RQ_\alpha}{OR} = \frac{PS}{OP}$$

Para evitar confusão, a linha em cima do par de pontos utilizada para denotar o comprimento do segmento entre estes pontos será sempre eliminada quando estivermos em uma fração. Conseqüentemente

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{PS}{1} = \overline{PS}$$

Substituindo este valor em (15), chegamos a

$$\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha < \alpha < \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Dividindo esta expressão por $\operatorname{sen}\alpha$, temos que

$$\cos\alpha < \frac{\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}$$

Tomando os inversos, obtemos que

$$\cos\alpha < \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha} \tag{16}$$

Iremos analisar estas desisgualdades quando $\alpha \to 0^+$.

Quando $\alpha \to 0^+$, temos que $Q_\alpha \to P$ e $R \to P$. Portanto, $\cos\alpha = \overline{OR} \to \overline{OP} = 1$. Isto é,

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \cos\alpha = 1$$

Como o limite do quociente é o quociente dos limites, quando o denominador não tende a 0, temos que

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\lim_{\alpha\to 0^+} 1}{\lim_{\alpha\to 0^+} \cos\alpha} = \frac{1}{1} = 1$$

Conseqüentemente o lado direito e o lado esquerdo das desigualdades (16) tendem a 1 quando $\alpha \to 0^+$. Não resta uma outra alternativa para o termo intermediário que não seja se aproximar de 1 porque está sendo limitado inferiormente e superiormente por quantidades que se aproximam de 1. Isto é,

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$$

Logo (14) segue.

O conhecimento do valor do limite (13) permite o cálculo de inúmeros outros limites "do tipo $\frac{0}{0}$". Não faremos isto agora, pois todos estes limites podem ser calculados através da regra de L'Hôspital, que será abordada mais a frente. Contudo, reduziremos o limite considerado no próximo exemplo ao limite fundamental que acabamos de calcular, já que será utilizado para o cálculo da derivada da função cosseno.

Exemplo 4. *Calcule o seguinte limite*

$$\lim_{X\to 0} \frac{1-\cos X}{X}$$

Multiplicando o numerador e o denomidar da fração por $1+\cos X$ temos que

$$\lim_{X\to 0} \frac{1-\cos X}{X} = \lim_{X\to 0} \frac{(1-\cos X)(1+\cos X)}{X(1+\cos X)} = \lim_{X\to 0} \frac{1-\cos^2 X}{X(1+\cos X)}$$

Como $\operatorname{sen}^2 X = 1-\cos^2 X$, temos que

$$\lim_{X\to 0} \frac{1-\cos X}{X} = \lim_{X\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 X}{X(1+\cos X)} = \lim_{X\to 0} \frac{\operatorname{sen} X}{X} \frac{\operatorname{sen} X}{(1+\cos X)}$$

Mas o limite do produto é o produto dos limites e, quando o quociente não tende a 0, o limite do quociente é o quociente dos limites,

$$\lim_{X\to 0} \frac{1-\cos X}{X} = \lim_{X\to 0} \frac{\operatorname{sen} X}{X} \lim_{X\to 0} \frac{\operatorname{sen} X}{1+\cos X} = \lim_{X\to 0} \frac{\operatorname{sen} X}{X} \frac{\lim_{X\to 0} \operatorname{sen} X}{\lim_{X\to 0} 1+\cos X}$$

Como $\lim_{X\to 0} \operatorname{sen} X = 0$ e $\lim_{X\to 0} 1+\cos X = 2$, chegamos a

$$\lim_{X\to 0} \frac{1-\cos X}{X} = \lim_{X\to 0} \frac{\operatorname{sen} X}{X} \frac{\lim_{X\to 0} \operatorname{sen} X}{\lim_{X\to 0} 1+\cos X} = 1 \times \frac{0}{2} = 0$$

Note que o cálculo do limite foi reduzido ao cálculo do limite fundamental e mais alguns outros limites que são simples de serem estabelecidos. Em geral, esta redução pode ser muito engenhosa e por este motivo não daremos ênfase a este processo.

3. A derivada do seno

Na próxima regra, apresentaremos a derivada da função seno.

Regra 5. *Se $f(X) = \operatorname{sen} X$, então $f'(X) = \cos X$*

Pela definição da derivada,

$$f'(X) = \lim_{h\to 0} \frac{f(X+h) - f(X)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(X+h) - \operatorname{sen} X}{h} \tag{17}$$

A diferença dos senos no numerador, por (12), pode ser transformada em

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(X+h) - \operatorname{sen} X =& 2\cos\left(\frac{(X+h)+X}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(X+h)-X}{2}\right)\\ =& 2\cos\left(X + \frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)\end{aligned}$$

Substituindo esta identidade em (17), concluímos que

$$f'(X) = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(X+\frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \cos\left(X + \frac{h}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

Como o limite do produto é o produto dos limites, temos que

$$f'(X) = \lim_{h\to 0} \cos\left(X + \frac{h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

Vamos substituir a variável no segundo limite para chegarmos ao limite fundamental abordado na seção anterior. Tomando $h = 2t$, observamos que $t \to 0$ quando $h \to 0$, e daí

$$f'(X) = \lim_{h\to 0} \cos\left(X + \frac{h}{2}\right)\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}$$

Note que o primeiro limite, da esquerda para a direita, é igual a $\cos X$ e o segundo é o limite fundamental calculado na seção anterior sendo igual a 1. Portanto,

$$f'(X) = \cos X$$

Exemplo 6. *Determine as equações das retas tangentes à curva de equação $Y = \operatorname{sen} X$ que são horizontais indicando os seus pontos de tangência.*

Esta curva é o gráfico da função $f(X) = \operatorname{sen} X$. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico desta função no ponto de abscissa X é $f'(X)$, que é igual $\cos X$ pela Regra 5. Necessitamos encontrar todos os X tais que $f'(X) = 0$. Isto é,

$$\cos X = 0 \tag{18}$$

As soluções de (18) no intevalo $[0, 2\pi)$ são $X = \frac{\pi}{2}$ e $X = \frac{3\pi}{2}$. Como $\cos X$ é uma função periódica, com período 2π, obtemos as outras soluções de (18) somando a cada uma destes dois valores todos os possíveis múltiplos inteiros de 2π. Isto é, as soluções de (18) são

$$\begin{aligned} X &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \text{para } k \in \mathbb{Z}\\ X &= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ \text{para } k \in \mathbb{Z}\end{aligned} \tag{19}$$

Note que (19) pode ser resumida da seguinte forma

$$X = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \text{para } k \in \mathbb{Z}$$

Quando $X = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$, o valor de $f(X)$ é igual a $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Logo $Y = 1$ é tangente á curva $Y = \operatorname{sen} X$ nos pontos $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1\right)$, para $k \in \mathbb{Z}$. Isto é, $Y = 1$ é tangente a esta curva em infinitos pontos. De maneira similar, concluímos que $Y = -1$ é tangente á curva $Y = \operatorname{sen} X$ nos pontos $\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 1\right)$, para $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 7. *Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(X) = \operatorname{sen} X$ no ponto com abscissa*
(i) $X = 0$ *(ii)* $X = \frac{\pi}{6}$ *(iii)* $X = \frac{2\pi}{3}$ *(iv)* $X = -\frac{\pi}{2}$ *(v)* $X = \frac{41\pi}{4}$

Exercício 8. *Encontre as retas normais à curva de equação $Y = 2\operatorname{sen} X$ que são paralelas à reta de equação $X + Y + 10 = 0$. Para cada uma destas retas, indique as coordenadas do ponto de tangência.*

Exercício 9. *Considere a função dada por $f(X) = X - \operatorname{sen} X$*
(i) *Calcule $f'(X)$*
(ii) *Qual o menor e o maior valor assumidos por $f'(X)$?*
(iii) *Existe número real a tal que a reta de equação $5X + 12Y + a = 0$ é tangente à curva de equação $Y = X - \operatorname{sen} X$?*

4. A derivada do cosseno

Estabeleceremos, com uma outra abordagem, a regra para derivar o cosseno. Qualquer uma das duas abordagens serve para encontrar a derivada das funções seno e cosseno. Você é capaz de permutar as abordagens?

Regra 10. *Se $f(X) = \cos X$, então $f'(X) = -\operatorname{sen} X$*

Pela definição da derivada,

$$f'(X) = \lim_{h\to 0} \frac{f(X+h) - f(X)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(X+h) - \cos X}{h}$$

Utilizando (8), que é uma relação para o cosseno da soma de ângulos, chegamos a

$$f'(X) = \lim_{h\to 0} \frac{[\cos X \cos h - \operatorname{sen} X \operatorname{sen} h] - \cos X}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos X(\cos h - 1) - \operatorname{sen} X \operatorname{sen} h}{h}$$

Podemos reescrever esta expressão da seguinte forma

$$f'(X) = \lim_{h\to 0} \left[\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right)\cos X - \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)\operatorname{sen} X\right]$$

Pelas propriedades básicas de limites, obtemos que

$$f'(X) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \lim_{h\to 0} \cos X - \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} X$$

Mas $\lim_{h\to 0} \cos X = \cos X$ e $\lim_{h\to 0} \operatorname{sen} X = \operatorname{sen} X$. Portanto,

$$f'(X) = \left[\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}\right]\cos X - \left[\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right]\operatorname{sen} X$$

Como o primeiro limite, da esqueda para a direita, foi calculado no Exemplo 4 e vale 0 e o segundo limite é o limite fundamental e vale 1, temos que

$$f'(X) = 0\cos X - 1\operatorname{sen} X = -\operatorname{sen} X$$

Exemplo 11. *A derivada de ordem n de $f(X) = \operatorname{sen} X$ é dada por*

$$f^{(n)}(X) = \begin{cases} \operatorname{sen} X & \textit{se o resto da divisão de } n \textit{ por 4 é 0} \\ \cos X & \textit{se o resto da divisão de } n \textit{ por 4 é 1} \\ -\operatorname{sen} X & \textit{se o resto da divisão de } n \textit{ por 4 é 2} \\ -\cos X & \textit{se o resto da divisão de } n \textit{ por 4 é 3} \end{cases} \tag{20}$$

Observe que a seqüência de funções

$$f(X), f'(X), f''(X), f^{(3)}(X), f^{(4)}(X), f^{(5)}(X), f^{(6)}(X), f^{(7)}(X), f^{(8)}(X) \dots$$

é dada por

$$\operatorname{sen} X, \cos X, -\operatorname{sen} X, -\cos X, \operatorname{sen} X, \cos X, -\operatorname{sen} X, -\cos X, \operatorname{sen} X, \dots$$

pois o termo seguinte é igual a derivada do anterior. Note que esta seqüência tem período 4. Isto é, $f^{(k)}(X) = f^{(k+4)}(X)$, para todo número natural k. Esta é a propriedade descrita em (20).

Exercício 12. *Encontre uma expressão para a derivada de ordem n da função $f(X) = 5\cos X$*

Exercício 13. *Decida a veracidade de cada uma das seguintes afirmações sobre a função $f(X) = 5\operatorname{sen} X - 4\cos X$.*

(i) $f^{(29)}(X)$ *não é limitada.*
(ii) $f^{(1234)}(X) = f^{(18)}(X)$
(iii) $f^{(128)}(X)$ *nunca se anula.*
(iv) $f^{(317)}(X) = 4\operatorname{sen} X + 5\cos X$
(v) $f(X), f'(X), f''(X), f^{(3)}(X), f^{(4)}(X), f^{(5)}(X), \dots$ *é uma seqüência de período 4.*
(vi) $f^{(2k)}(X) = 5(-1)^k \operatorname{sen} X + 4(-1)^{k-1}\cos X$*, para todo natural k.*

Exercício 14. *Para a função*

$$f(X) = \frac{1 + 5\cos X}{\operatorname{sen}^2 X}$$

determine:

(i) *O seu maior domínio possível.*
(ii) *A sua derivada.*
(iii) *Os pontos para os quais a reta tangente ao seu gráfico é horizontal, caso existam.*
(iv) *Os intervalos para os quais a sua derivada é negativa.*

5. Respostas dos exercícios

1. $\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ e $\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ **2.** (i) V (ii) V (iii) V (iv) V **3.** (i) $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ (ii) $\cos A - \cos B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$ (iii) $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ **7.** (i) $X - Y = 0$ (ii) $6\sqrt{3}X - 12Y + 6 - \sqrt{3}\pi = 0$ (ii) $3X + 6Y - 3\sqrt{3} - 2\pi = 0$ (iv) $Y + 1 = 0$ (v) $4\sqrt{2}X - 8Y + 4\sqrt{2} - \sqrt{2}\pi = 0$ **8.** $X + Y - \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - 2k\pi = 0$ no ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \sqrt{3}\right)$, para $k \in \mathbb{Z}$; e $X + Y + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} - 2k\pi = 0$ no ponto de coordenadas $\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\sqrt{3}\right)$, para $k \in \mathbb{Z}$ **9.** (i) $1 - \cos X$ (ii) 0 e 2 (iii) não **12.** $f^{(n)}(X) = 5\cos X$ se o resto da divisão de n por 4 é 0; $f^{(n)}(X) = -5\operatorname{sen} X$ se o resto da divisão de n por 4 é 1; $f^{(n)}(X) = -5\cos X$ se o resto da divisão de n por 4 é 2; $f^{(n)}(X) = 5\operatorname{sen} X$ se o resto da divisão de n por 4 é 3 **13.** (i)

F (ii) V (iii) F (iv) V (v) V (vi) V **14.** (i) $\{X \in \mathbb{R} : X \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ (ii) $-\frac{5+2\cos X+5\cos^2 X}{\operatorname{sen}^3 X}$ (iii) não existem (iv) $(2k\pi, 2k\pi+\pi)$, para $k \in \mathbb{Z}$

Conteúdo da quinta aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos