



Universidade Federal de Pernambuco  
Departamento de Física

**Exame Geral de Doutorado**  
Primeiro semestre de 2025

## **Eletrodinâmica Clássica**

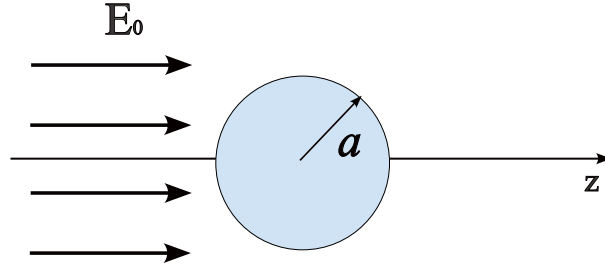
10/03/2025 - 09:00 às 12:00

(Escolha três dentre as quatro questões)

---

**QUESTÃO 1: ELETROSTÁTICA**

Seja uma esfera com raio  $a$  exposta a um campo elétrico uniforme na direção  $\hat{z}$ ,  $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{z}$ , como indicado na figura abaixo.



- (a) (50%) Se a esfera tem uma constante dielétrica  $\epsilon$ , determine o potencial elétrico, dentro e fora da esfera, usando as condições de contorno apropriadas.
  - (b) (30%) Determine o campo elétrico dentro e fora da esfera na situação descrita no item (a).
  - (c) (20%) Agora, imagine que a esfera é metálica. Determine o campo elétrico dentro e fora da esfera. (Dica: a esfera metálica equivale a uma esfera dielétrica no limite  $\epsilon/\epsilon_0 \rightarrow \infty$ ).
- 

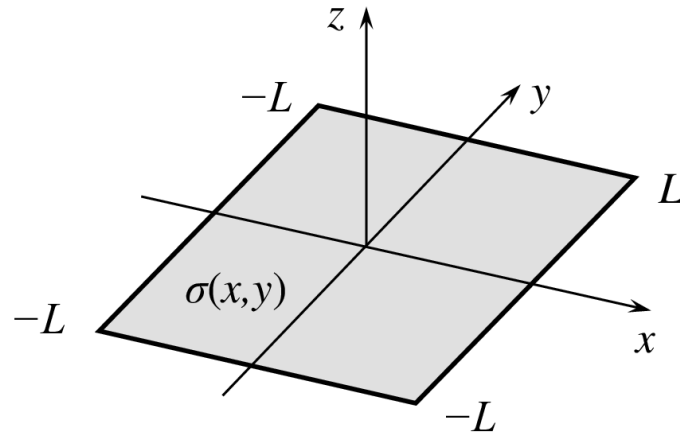
Dados:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta),$$

$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\phi}.$$

**QUESTÃO 2: ELETROSTÁTICA - EXPANSÃO MULTIPOLAR**

Na figura abaixo temos uma placa bidimensional quadrada, de lado  $2L$ , que se encontra no plano  $x-y$ . A placa tem uma densidade superficial de carga dada por  $\sigma(x, y) = ax + by + c$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes. Todo o sistema está imerso no vácuo, cuja constante de permissividade elétrica é dada por  $\epsilon_0$ . Usando coordenadas retangulares, responda aos itens abaixo:



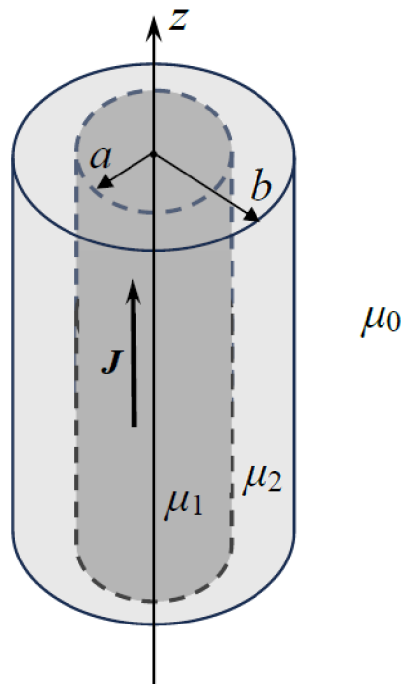
- (a) (10%) Calcule a carga elétrica total  $Q$  da placa quadrada.
- (b) (30%) Calcule o vetor momento de dipolo elétrico  $\mathbf{p}$  da placa quadrada.
- (c) (40%) Calcule o potencial elétrico  $V(x, y, z)$  para um ponto  $\mathbf{r}$  de coordenadas  $(x, y, z)$ , suficientemente afastado da placa ( $r \gg 2L$ , onde  $r = |\mathbf{r}|$ ). Para o cálculo de  $V$ , use a expansão multipolar, incluindo apenas os dois termos de mais baixa ordem.
- (d) (20%) Explique qualitativamente como suas respostas aos itens (a), (b) e (c) seriam modificadas, se um outro ponto no plano  $x-y$  fosse escolhido para a origem do sistema de coordenadas.

**QUESTÃO 3: MAGNETOSTÁTICA**

A figura abaixo ilustra parte de dois cilindros coaxiais e infinitos, de raios iguais a  $a$  e  $b$ . O cilindro interno tem permeabilidade magnética  $\mu_1$ , enquanto que o cilindro externo tem permeabilidade magnética  $\mu_2$ . Neste sistema, existe uma densidade de corrente livre  $\mathbf{J}$  na direção  $z$ , de intensidade dada por

$$J(r) = kr^2, \text{ para } 0 \leq r \leq a \quad \text{e} \quad J(r) = 0, \text{ para } r > a.$$

Considere que  $k$  é uma constante positiva e que  $r$  denota a distância radial até o eixo de simetria dos cilindros (eixo  $z$  na figura). A região  $r > b$  encontra-se no vácuo, cuja permeabilidade magnética é dada por  $\mu_0$ . Sabe-se que os meios magnéticos são lineares. Nestas condições, calcule:



- (a) (15%) Os vetores  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{M}$  na região  $0 \leq r < a$ .
- (b) (15%) Os vetores  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{M}$  na região  $a \leq r \leq b$ .
- (c) (15%) Os vetores  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{M}$  na região  $r > b$ .
- (d) (25%) O vetor densidade de corrente ligada  $\mathbf{J}_{\text{lig}}$  na região  $0 \leq r < a$ .
- (e) (30%) O vetor densidade de corrente superficial ligada  $\mathbf{K}_{\text{lig}}$  em  $r = a$ .

**Dados:**

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{r} + \left[ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \hat{\phi} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi) - \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] \hat{z},$$

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m), \mathbf{J}_{\text{lig}} = \nabla \times \mathbf{M}, \mathbf{K}_{\text{lig}} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}.$$

**QUESTÃO 4: ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM UM MEIO CONDUTOR**

Considere um meio condutor isotrópico, de condutividade  $\sigma$  e constante dielétrica  $\epsilon$ . Suponha que  $\sigma$  e  $\epsilon$  são constantes.

- (a) (25%) A partir das equações de Maxwell, mostre que a equação de onda, no meio condutor, para o campo  $\mathbf{E}$  é da forma:

$$\mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \nabla^2\mathbf{E}.$$

- (b) (55%) Considere agora uma onda eletromagnética que se propaga no vácuo e incide perpendicularmente à superfície plana ( $z = 0$ ) deste meio condutor. Considere o condutor semi-infinito, situado em  $z \geq 0$ . Ao penetrar no meio condutor, os campos elétrico e magnético são da forma:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 \exp\left[i(\tilde{k}z - \omega t)\right],$$

$$\mathbf{B}(z, t) = \mathbf{B}_0 \exp\left[i(\tilde{k}z - \omega t)\right],$$

onde  $\omega$  é a frequência angular e  $\tilde{k} = k + i\eta$  é um número de onda complexo.

Mostre que as expressões para  $k = \text{Re}[\tilde{k}]$  e  $\eta = \text{Im}[\tilde{k}]$  são dadas por:

$$k = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1 \right]},$$

$$\eta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right]}.$$

- (c) (20%) Encontre a expressão para o comprimento de penetração (*skin depth*), em termos de  $\omega$ ,  $\sigma$  e  $\epsilon$ . O comprimento de penetração é a distância em que a amplitude do campo decai para  $\mathbf{E}_0 e^{-1}$ .

Dados:

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$