

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2024

Mecânica Quântica

28/02/2021 - 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões.)

(Não escreva seu nome na prova. Informe apenas o CPF.)

QUESTÃO 1 – FUNDAMENTOS DA MECÂNICA QUÂNTICA

Uma partícula de massa m e sem spin move-se livremente ao longo do eixo x . No instante $t = 0$, sua função de onda é dada por

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k, 0) e^{ikx} dk.$$

Nos itens (a) e (b) a seguir, considere $g(k, 0) = Ae^{-\sigma^2 k^2}$, com A e σ reais.

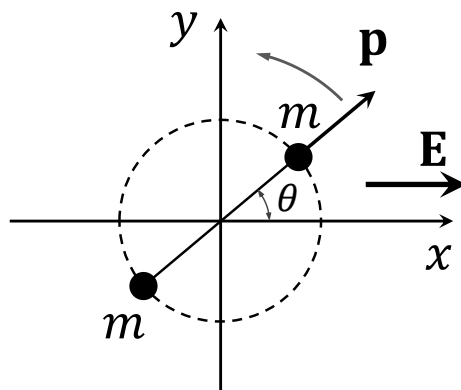
- (a) (25%) Calcule A de modo que $|\Psi(x, 0)|^2$ seja normalizada à unidade.
- (b) (25%) Calcule o produto $\Delta x \Delta k$, onde Δx e Δk denotam as larguras das gaussianas $|\Psi(x, 0)|^2$ e $|g(k, 0)|^2$. Interprete o resultado obtido.
- (c) (25%) Considere, agora, a partícula livre para o caso de $g(k, 0)$ geral. Determine $\Psi(x, t)$. (Expresse o seu resultado em termos de uma integral envolvendo $g(k, 0)$.)
- (d) (25%) Seja $g(k, 0) = \delta(k - k_0)$, onde δ é a delta de Dirac e k_0 é uma constante. Calcule $|\Psi(x, t)|^2$ e interprete o resultado. Discuta os valores de Δx e Δk .

Dados: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2(u-\beta)^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$, para α, β complexos e $\text{Re}\{\alpha^2\} > 0$.

A gaussiana $e^{-u^2/(2\gamma^2)}/(2\pi\gamma^2)^{1/2}$, onde γ é uma constante real, possui largura $\Delta u = \gamma$.

QUESTÃO 2 – TEORIA DE PERTURBAÇÃO INDEPENDENTE DO TEMPO

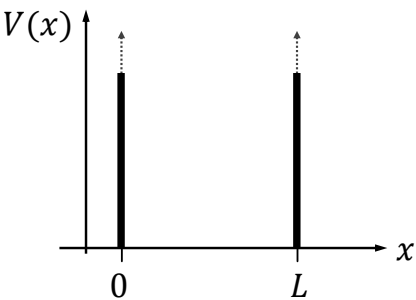
Uma molécula diatômica submetida a um campo elétrico constante e uniforme pode ser tratada como um rotor rígido com momento de inércia I e momento de dipolo elétrico \mathbf{p} . A molécula gira no plano xy , descrevendo uma trajetória circular de raio a , perpendicular ao eixo z . O campo elétrico $\mathbf{E} = E_0 \hat{x}$, fraco, está aplicado no plano de rotação da molécula.



- (a) (40%) Escreva o Hamiltoniano clássico do rotor rígido na forma $H = H_0 + H'$, onde H_0 é a parte não perturbada e H' a perturbação devido à aplicação do campo \mathbf{E} . Ignore o movimento de translação do centro de massa. Determine os auto-estados, $|n\rangle$, e autovalores, E_n , do hamiltoniano não perturbado, H_0 . Discuta as degenerescências.
- (b) (30%) Calcule a probabilidade de transição entre os estados não perturbados $|n\rangle$ e $|m\rangle$ quando o rotor está submetido à perturbação do tipo dipolo elétrico, isto é, calcule o elemento de matriz $\langle n | H' | m \rangle$. Determine a regra de seleção para transições entre níveis, induzidas pela perturbação. Discuta fisicamente.
- (c) (30%) Usando teoria de perturbação, calcule as correções de primeira e segunda ordens para a energia do estado fundamental não perturbado.
-

QUESTÃO 3 – PARTÍCULAS IDÊNTICAS NUM POÇO DE POTENCIAL 1-D

Duas partículas de massa m , idênticas, não interagentes, encontram-se em um poço de potencial infinito de largura L mostrado na figura e definido por

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 < x < L ; \\ \infty, & \text{para } x < 0 \text{ ou } x > L . \end{cases}$$


- (a) (25%) Mostre que os estados de uma **única** partícula têm as energias e funções de onda, respectivamente, dadas por

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \equiv n^2 E_1, \quad \text{com } n \text{ inteiro} \quad ; \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Nos itens a seguir, considerando o sistema de **duas partículas**, determine a função de onda e a energia dos dois estados de energia mais baixa, assim como sua degenerescência. Suponha que as duas partículas sejam:

- (b) (25%) distinguíveis.
- (c) (25%) bósons.
- (d) (25%) férmions, supondo que tenham o mesmo spin S_z .
-

QUESTÃO 4 – MOMENTO ANGULAR NA MECÂNICA QUÂNTICA

Em um experimento, átomos idênticos são emitidos por uma fonte, preparados com as seguintes características: i) todos os átomos têm a mesma velocidade; ii) todos os átomos têm o mesmo número quântico j , sendo $\hbar^2 j(j+1)$ o autovalor do quadrado do momento angular total de cada átomo, $\hat{\mathbf{J}}^2$; iii) a fonte não seleciona nenhum valor para as componentes \hat{J}_x , \hat{J}_y , \hat{J}_z de $\hat{\mathbf{J}}$.

Após a fonte, os átomos passam por uma região onde há um campo magnético \mathbf{B} constante e uniforme. Cada átomo interage apenas com o campo, de forma que o único termo de interação no seu hamiltoniano é $\hat{H}_{\text{int}} = \omega \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{J}}$, onde ω é uma constante. Após a região de interação com o campo magnético, mede-se E_{int} , a energia de interação dos átomos com o campo magnético.

A medição de vários átomos revela apenas **três** valores possíveis para a energia, $E_{-1} < E_0 < E_{+1}$. Denote por $|-1\rangle$, $|0\rangle$ e $|+1\rangle$ os três autovetores normalizados do hamiltoniano, correspondentes a E_{-1} , E_0 , E_{+1} , respectivamente.

- (a) (20%) Qual é o valor de j ? Explique como chegou a essa conclusão.
- (b) (40%) Mede-se a energia de um dos átomos e o resultado é $E_{\text{int}} = \omega B$, onde $B = |\mathbf{B}|$. Calcule o valor médio da componente de \mathbf{J} na direção de \mathbf{B} , após a medição da energia.
- (c) (40%) Considere um sistema de coordenadas tal que o eixo z esteja na mesma direção do campo magnético, i.e. $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$. Mostre que o estado

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2}|-1\rangle$$

é um autovetor da componente \hat{J}_x , e obtenha o autovalor correspondente.