



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

**Exame Geral de Doutorado**

Segundo Semestre de 2022

# Eletrodinâmica Clássica

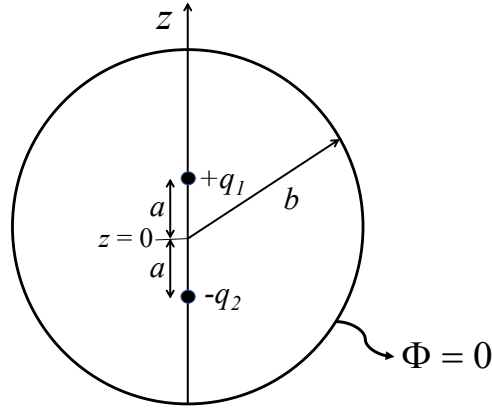
08/08/2022 - 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões)

---

**QUESTÃO 1 – ELETROSTÁTICA: FUNÇÃO DE GREEN**

Duas cargas pontuais,  $q_1$  e  $-q_2$  ( $q_1, q_2 > 0$ ), estão separadas por uma distância  $2a$  e colocadas simetricamente ao longo do eixo  $z$ . Uma superfície esférica condutora aterrada de raio  $b$  está centralizada em  $z = 0$  de modo que o potencial  $\Phi(r = b) = 0$ , como indicado na figura abaixo.



- (a) (20%) Expresse a densidade de cargas correspondente às cargas pontuais em termos das coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  definidas com relação ao eixo  $z$  da figura.
  - (b) (40%) Use o método da função de Green para determinar o potencial no interior da superfície esférica.
  - (c) (20%) Usando o resultado anterior, determine o potencial no caso limite em que  $a \rightarrow 0$ ,  $(q_1 + q_2) \rightarrow \infty$ , com  $(q_1 - q_2) = q = \text{constante}$  e  $a(q_1 + q_2) = p = \text{constante}$ .
  - (d) (20%) No item anterior, analise sua resposta no limite em que  $b \rightarrow \infty$  e interprete fisicamente o seu resultado.
- 

Dados:

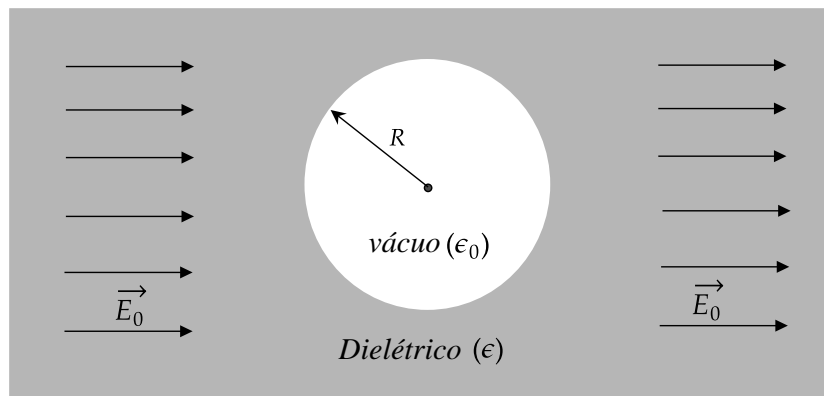
$$P_l(1) = 1, \quad P_l(-1) = (-1)^l, \quad Y_{l,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta)$$

$$G(\vec{X}, \vec{X}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)[1 - (\frac{a}{b})^{2l+1}]} (r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}}) (\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}})$$

---

**QUESTÃO 2 – ELETROSTÁTICA EM MEIOS DIELÉTRICOS**

Em um meio dielétrico homogêneo infinito, com constante dielétrica  $\epsilon$ , existe inicialmente um campo elétrico uniforme dado por  $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$ . Considere agora que fazemos no interior do dielétrico uma cavidade esférica de raio  $R$  e constante dielétrica  $\epsilon_0$ , conforme indicado na figura abaixo.



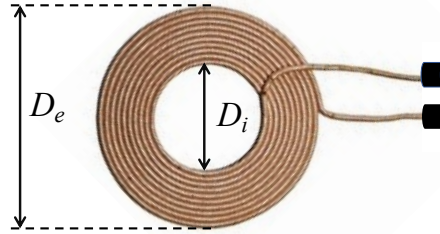
- (a) (10%) Usando coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , com a origem escolhida no centro da cavidade esférica, explique por que o potencial eletrostático deve ser independente do ângulo azimutal  $\phi$ .
- (b) (30%) Escreva a forma geral para o potencial elétrico dentro,  $V_{dentro}(r, \theta)$ , e fora,  $V_{fora}(r, \theta)$ , da cavidade esférica.
- (c) (40%) Use a condição de contorno apropriada para determinar o potencial dentro da cavidade esférica,  $V_{dentro}(r, \theta)$ . Obtenha o campo elétrico dentro da cavidade.
- (d) (20%) Esboce a distribuição de cargas induzidas na superfície da cavidade esférica.
- 

Dado:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

**QUESTÃO 3 – CIRCUITO  $RLC$  E LEI DE INDUÇÃO**

Considere uma espira em forma de panqueca composta de  $n$  voltas de um fio de cobre de diâmetro  $d$ , conforme mostrado na figura abaixo. O diâmetro interno da espira é  $D_i$  e o diâmetro externo dado pela expressão  $D_e = D_i + 2nd$ .



- (a) (20%) Considere agora que no instante inicial ( $t = 0$ ) a espira é conectada a uma resistência  $R$  e a um capacitor de capacitância  $C$ , carregado inicialmente com uma diferença de potencial  $V_0$  e isolado da fonte de alimentação. A espira, o capacitor e o resistor formam um circuito  $RLC$  em série criticamente amortecido, cuja corrente é descrita pela expressão:

$$I(t) = Ate^{-(t/\tau)} + Be^{-(t/\tau)}$$

onde,  $\tau = 2L_0/R$ ,  $L_0$  é a indutância da espira e  $A$  e  $B$  constantes. Determine as constantes  $A$  e  $B$  em função dos parâmetros do circuito ( $C, R, V_0$  e  $L_0$ ).

- (b) (30%) Calcule o campo magnético total  $\vec{B}_n$  no centro da espira quando através dela circula, no sentido anti-horário, a corrente  $I(t)$  calculada acima.
- (c) (30%) Colocamos agora um anel metálico, de diâmetro  $d_a < D_i$  e resistência  $R_a$ , no centro da espira e no mesmo plano desta. O capacitor é recarregado com a mesma diferença de potencial  $V_0$  e novamente descarregado através do mesmo circuito anterior. Calcule: (i) a corrente induzida no anel metálico; (ii) o campo magnético no centro no anel,  $\vec{B}_a(t)$ , devido à corrente induzida. Considere que o campo magnético  $\vec{B}_n$  é uniforme na região do anel e igual ao seu valor no centro na espira.
- (d) (20%) Faça um esboço dos campos  $\vec{B}_n(t)$  e  $\vec{B}_a(t)$ , indicando as direções e sentidos relativos destes campos. Identifique o intervalo de tempo no qual o anel é repelido pela espira.

Dado:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

---

**QUESTÃO 4 – CAMPOS QUASE-ESTÁTICOS**

Um capacitor consiste em um par de placas circulares paralelas perfeitamente condutoras, possuindo cargas opostas e mesmo raio  $a$ . Ambas as placas são ortogonais ao eixo  $z$ , com o centro da placa inferior localizado no plano  $z = 0$ , enquanto o da segunda placa está localizado em  $z = d$ , com  $d \ll a$  para que os efeitos de borda possam ser desprezados. A placa inferior possui uma densidade de carga superficial uniforme e dependente do tempo  $\sigma(t) = \sigma_0 \cos \omega t$ . Na aproximação quase-estática, onde  $a\omega/c \ll 1$ , os efeitos de retardo podem também ser desprezados.

- (a) (10%) Calcule o valor instantâneo do campo elétrico  $\vec{E}(t)$  entre as placas do capacitor.
  - (b) (20%) Calcule o campo magnético  $\vec{B}(t)$  induzido pela corrente de deslocamento devido ao campo elétrico calculado no item (a).
  - (c) (40%) Calcule o vetor de Poynting  $\vec{S}$  e o fluxo de energia através de uma superfície cilíndrica  $x^2 + y^2 = r^2$  ( $r < a$ ), localizada dentro do capacitor, entre  $z = 0$  e  $z = d$ . Considerando apenas os termos em primeira ordem em  $\omega$ , verifique a validade do teorema de Poynting.
  - (d) (30%) O campo magnético induzido calculado no item (b) gera um campo elétrico induzido adicional,  $\vec{E}_{ind}(r) = E_{ind}(r)\hat{z}$ , que é de segunda ordem em  $\omega$ . Calcule  $E_{ind}(r) - E_{ind}(r = 0)$ .
-