

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2023

Mecânica Estatística

02/08/2023 - 9h00 às 12h00

→ Escolha três dentre as quatro questões.

→ Informe apenas seu CPF (não escreva seu nome na prova).

QUESTÃO 1 – GÁS DE VAN DER WAALS

Um mol de um gás de van der Waals tem energia interna igual a

$$U = \frac{f}{2}RT - \frac{a}{V},$$

onde f é uma constante, e obedece à equação de estado

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT.$$

- (a) (20%) Expresse os valores do volume, temperatura e pressão desse gás em seu ponto crítico, V_c , T_c e p_c , em termos das constantes a e b .
- (b) (35%) Obtenha a expressão da equação de estado em termos das variáveis adimensionais $\mathcal{P} = p/p_c$, $\mathcal{T} = T/T_c$ e $\mathcal{V} = V/V_c$, e interprete o resultado obtido.
- (c) (10%) O fator de compressibilidade $Z = pV/(RT)$ permite estimar o quanto o comportamento de um gás real se desvia daquele esperado para um gás ideal. Para muitos gases reais, o fator de compressibilidade no ponto crítico, Z_c , vale cerca de 0,28. Encontre o valor de Z_c para o gás de van der Waals considerado e comente o resultado obtido.
- (d) (35%) Esse gás é submetido a uma expansão do tipo Joule-Thomson, isto é, enquanto mantido termicamente isolado, ele é forçado a passar através de um plugue poroso, o que leva ao aumento de seu volume e consequente variação de sua temperatura. Enquanto V e T variam, que grandezas termodinâmicas permanecem constantes durante o processo?

Considerando $b \ll V$, calcule a chamada “temperatura de inversão” desse gás, isto é, aquela temperatura abaixo da qual a expansão leva a um resfriamento. Interprete fisicamente a ocorrência dessas duas situações, de que a expansão possa levar a um aumento ou a uma diminuição da temperatura do gás.

Dica: Quando um potencial termodinâmico permanece constante em um processo, seu diferencial total é nulo.

QUESTÃO 2 – OSCILADORES HARMÔNICOS QUÂNTICOS NÃO INTERAGENTES

Considere um sistema de N osciladores harmônicos quânticos não interagentes e localizados, em contato com um banho térmico à temperatura T . Considerando que todos eles têm a mesma frequência de oscilação ω :

- (a) (30%) Determine a função de partição canônica Z para este sistema.
- (b) (30%) Determine a energia média do sistema, \bar{E} , e discuta seu comportamento no limite de baixas temperaturas.
- (c) (20%) Calcule o calor específico a volume constante, C_V , e escreva o resultado em termos de $\theta_E = \hbar\omega/k_B$.
- (d) (20%) Compare os resultados obtidos nos itens (b) e (c) com o comportamento previsto pela lei de Dulong e Petit.

QUESTÃO 3 – GÁS DE FÓTONS BIDIMENSIONAL

Considere um gás de fótons não interagentes, mantido à temperatura T , confinado a uma grande área quadrada, $A = L^2$, sob condições de contorno periódicas em duas dimensões. Em duas dimensões, os fótons têm apenas um estado de polarização transversal possível.

- (a) (25%) Determine os valores permitidos para \vec{k} , o número de onda dos fótons, e a frequência ω , e calcule a densidade de estados $g(\omega)$ correspondente.
- (b) (25%) Considerando grandes valores de L , escreva uma expressão para $\ln \mathbb{Z}(T)$ como uma integral sobre a frequência dos fótons, onde $\mathbb{Z}(T)$ é a função de partição grande canônica quântica do gás de fótons.
- (c) (25%) A densidade de energia total U/A do gás de fótons pode ser escrita como uma integral sobre a frequência ω dos fótons, ou seja,

$$U/A = \int_0^\infty d\omega \, u(\omega, T).$$

Encontre a função $u(\omega, T)$ e determine a dependência explícita com a temperatura da densidade de energia U/A , que deve ser proporcional a uma função de Riemann $\zeta(n)$ de ordem adequada.

- (d) (25%) Usando funções de Riemann de ordem apropriada, calcule a entropia por fóton e mostre que ela é independente tanto da temperatura T quanto da área A .

QUESTÃO 4 – GÁS DE FERMI ULTRA-RELATIVÍSTICO EM d DIMENSÕES

Considere um gás de N férmions não interagentes com spin S , confinado em uma hipersfera de dimensão d , à temperatura $T = 0$. Os férmions obedecem à relação de dispersão $\varepsilon_k = \hbar ck$, onde $k = |\vec{k}|$ e c é a velocidade da luz.

- (a) (25%) Escreva a densidade de estados $g(k)$ como função de k e d , considerando condições periódicas de contorno.
- (b) (25%) Mostre que a densidade de estados em função da energia se comporta como

$$D(\varepsilon) = \alpha \varepsilon^\beta,$$

onde α e β dependem de d . Discuta os casos em que $d = 1, 2$ e 3 .

- (c) (25%) Calcule a energia de Fermi, ε_F , em termos do parâmetro α do item anterior e de d .
- (d) (25%) Calcule a energia do estado fundamental, ε_{ef} , expressando seu resultado em termos de ε_F , d , α e N .

Formulário

<i>Funções de Estado</i>	
Entalpia	$H = U + pV$
Energia livre de Helmholtz	$F = U - TS$
Energia livre de Gibbs	$G = U - TS + pV$

A função zeta de Riemann pode ser escrita como

$$\zeta(n+1) = \frac{1}{n!} \int_0^\infty dx \frac{x^n}{e^x - 1}, \quad \text{para } n > 1.$$

O volume da hipersfera de raio R e dimensão d é

$$\Omega_d(R) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} R^d.$$