

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2023

Eletrodinâmica Clássica

01/08/2023 - 9h00 às 12h00

→ Escolha três dentre as quatro questões.

→ Informe apenas seu CPF (não escreva seu nome na prova).

QUESTÃO 1 – ELETROSTÁTICA

Considere uma superfície esférica oca, não-condutora, de raio R , cuja distribuição fixa de carga elétrica tem densidade superficial

$$\sigma(\theta) = -K(1 - 3\cos^2\theta), \quad (1)$$

onde K é uma constante e o sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) tem o centro da superfície como origem.

- (a) (30%) Denote por $\Phi_{<}(\vec{x})$ e $\Phi_{>}(\vec{x})$ as soluções para o potencial eletrostático $\Phi(\vec{x})$ no interior e no exterior da casca esférica, respectivamente. A densidade de carga elétrica cria uma descontinuidade na derivada radial (direção normal à superfície),

$$\left[\frac{\partial \Phi_{>}}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_{<}}{\partial r} \right]_{r=R} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma, \quad (2)$$

onde a expressão em colchetes deve ser avaliada sobre a superfície da casca, onde $r = R$.

Como a distribuição de carga $\sigma(\theta)$ possui simetria azimutal, podemos expandi-la em polinômios de Legendre $P_\ell(\vec{x})$,

$$\sigma(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) c_\ell P_\ell(\cos\theta). \quad (3)$$

Use a Eq.(2) para mostrar como os coeficientes c_ℓ que aparecem na Eq.(3) determinam a expansão do potencial $\Phi(\vec{x})$ em polinômios de Legendre.

- (b) (40%) Encontre o potencial eletrostático $\Phi(r, \theta, \phi)$ em todo o espaço.
- (c) (30%) Encontre a energia eletrostática total do campo.

QUESTÃO 2 – MAGNETOSTÁTICA

Considere uma placa condutora plana infinita com espessura $2a$, pela qual passa uma densidade volumétrica uniforme de corrente elétrica \vec{J} . Escolha um sistema de coordenadas como na Figura 1(a), tal que a placa seja infinita nas direções x e y , suas faces estejam nos planos $z = \pm a$, e $\vec{J} = J\hat{x}$.

- (a) (20%) Calcule o campo magnético \vec{B} dentro da placa, como função de z .
- (b) (20%) Calcule o campo magnético \vec{B} fora da placa, como função de z .

Admita agora que existe uma impureza magnética com momento de dipolo $\vec{m} = m_0\hat{y}$ situada no interior da placa, na região $0 < z < a$. Na presença do campo magnético, o dipolo fica submetido a uma força

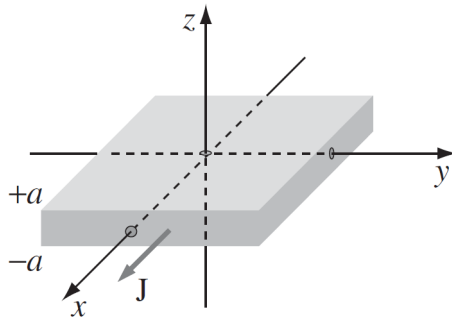
$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}). \quad (4)$$

- (c) (25%) Use a Eq.(4) e os resultados dos itens anteriores para calcular a força \vec{F} sobre o dipolo \vec{m} .

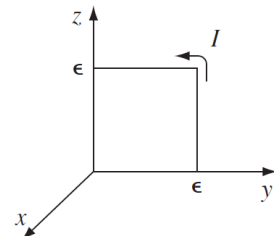
Considere que a impureza que cria o dipolo \vec{m} pode ser modelada como uma corrente I (independente de \vec{J}) circulando em uma pequena espira quadrada de lado $\epsilon \ll 1$, como mostrado na Figura 1(b).

- (d) (35%) Deduza a fórmula (4), usando o modelo do dipolo criado por uma pequena espira quadrada.

Dica: Lembre que a força que um campo magnético exerce sobre um fio com elemento de linha $d\vec{\ell}$ pelo qual passa uma corrente I é $\vec{F} = I \int (d\vec{\ell} \times \vec{B})$. A espira está imersa num campo magnético externo não uniforme, $\vec{B}(x, y, z)$, que pode ser expandido em série de Taylor. Assim, por exemplo, no lado direito da espira, $\vec{B} = \vec{B}(0, \epsilon, z) \approx \vec{B}(0, 0, z) + \epsilon \left. \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \right|_{(0,0,z)}$.



(a) Placa condutora infinita.



(b) Modelo de dipolo.

Figura 1

QUESTÃO 3 – CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Considere um fio cilíndrico de comprimento L e seção circular \mathcal{A} de raio R , pela qual passa uma corrente elétrica $I = \int \vec{J} \cdot \hat{n} dA$, onde dA é o elemento de área de \mathcal{A} , \hat{n} seu vetor normal unitário (direcionado para fora), e \vec{J} a densidade de corrente elétrica no interior do fio (ver Figura 2). Considere que o fio é um condutor ôhmico de condutividade σ , ou seja, que $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, e que o campo elétrico \vec{E} é uniforme no interior do cilindro.

- (a) (25%) Mostre que o módulo do campo elétrico na superfície do cilindro é

$$E = \frac{I}{\pi R^2 \sigma}.$$

- (b) (25%) Mostre que o módulo do campo magnético na superfície do cilindro é

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

- (c) (20%) Encontre o módulo, a direção e o sentido do vetor de Poynting, \vec{S} , na superfície do cilindro.

- (d) (30%) Calcule o fluxo de vetor de Poynting,

$$\mathcal{F} = \int \vec{S} \cdot \hat{n} dA, \quad (5)$$

através de toda a superfície do fio, incluindo as laterais e as seções retas. Lembrando que $E = V/L$, onde V é a diferença de potencial entre as duas pontas do fio, escreva o fluxo \mathcal{F} em termos de V e I . Interprete o resultado fisicamente.

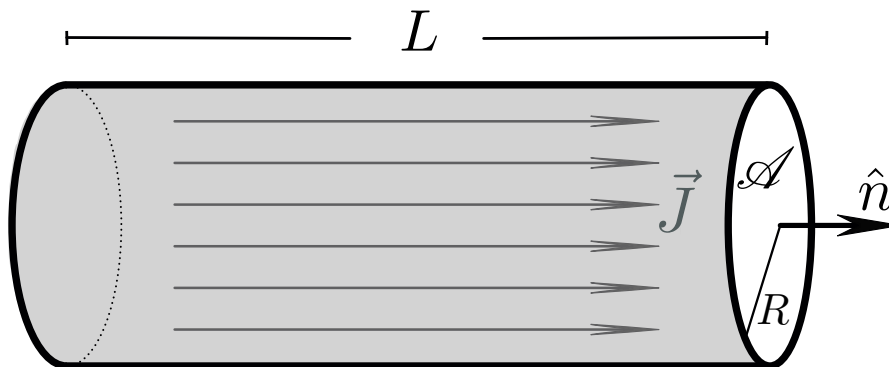


Figura 2

QUESTÃO 4 – MOMENTO ELETROMAGNÉTICO

Um campo eletromagnético (\vec{E}, \vec{B}) possui momento linear total

$$\vec{P} = \epsilon_0 \int d^3x \vec{E} \times \vec{B}. \quad (6)$$

Se o *campo magnético* $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ é independente do tempo, i.e. se $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, e se o campo elétrico \vec{E} e o potencial vetor \vec{A} vão a zero suficientemente rápido no infinito, é possível mostrar a identidade vetorial

$$\vec{P} = \epsilon_0 \int d^3x [\vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})]. \quad (7)$$

Considere que essa identidade é verdadeira para responder às questões abaixo.

- (a) (35%) Use o calibre de Coulomb e as equações de Maxwell para mostrar que é possível escrever

$$\vec{P} = \int d^3x \rho(\vec{x}) \vec{A}(\vec{x}), \quad (8)$$

onde $\rho(\vec{x})$ é a densidade de carga elétrica.

- (b) (30%) Considere um campo magnético \vec{B}_0 uniforme e estático, ou seja, que não depende da posição \vec{x} nem do tempo t . Mostre que o potencial vetor correspondente pode ser escrito como

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{B}_0 \times \vec{x}. \quad (9)$$

Mostre que esse potencial satisfaz o mesmo calibre usado no item (a).

- (c) (35%) Uma distribuição estática de densidade de carga elétrica ρ está imersa em um campo magnético constante \vec{B}_0 . Mostre que o momento linear do campo eletromagnético ao redor da distribuição é

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \vec{B}_0 \times \vec{p}, \quad (10)$$

onde \vec{p} é o momento de dipolo elétrico da distribuição de carga.

Formulário

Vetor de Poynting:

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Identidades vetoriais:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) + \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}\end{aligned}$$

Polinômios de Legendre:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \dots$$

$$\int_{-1}^1 dx P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell, \ell'}$$

Equação de Laplace:

Solução geral $\Phi(r, \theta)$ da equação de Laplace, $\nabla^2 \Phi = 0$, com simetria azimutal:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} [A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}] P_\ell(\cos \theta).$$

Se Φ é contínua sobre a superfície $r = R$, as soluções regulares em $r = 0$ e $r = \infty$ são, respectivamente,

$$\begin{aligned}\Phi_{<}(r, \theta) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell (r/R)^\ell P_\ell(\cos \theta), & r \leq R \\ \Phi_{>}(r, \theta) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell (r/R)^{-\ell-1} P_\ell(\cos \theta), & r \geq R\end{aligned}$$