



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2020

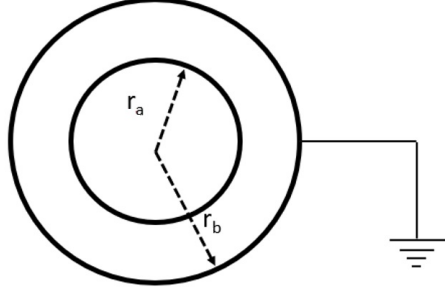
Eletrodinâmica Clássica

26/10/2020 - 13h00 às 16h00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1 – EQUAÇÃO DE LAPLACE

Considere duas cascas esféricas de raios r_a e r_b . Ver figura abaixo. A casca externa é metálica e se encontra aterrada.



- (a) (30%) A esfera interna, não condutora, tem potencial elétrico V_a . Obtenha, em função dos dados, o campo elétrico entre as duas cascas.
- (b) (40%) Para os itens seguintes suponha que a casca interna tenha densidade superficial de carga $s(q) = s_0 \cos(q)$. Obtenha relações entre os coeficientes da solução geral para as regiões $r < r_a$ e $r_a < r < r_b$ usando as condições de contorno adequadas em $r = r_a$ e $r = r_b$.
- (c) (30%) Encontre solução exata, determinando todos os coeficientes da solução geral nas duas regiões.

Dados:

$$\begin{aligned}
 V(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \\
 \vec{\nabla} T &= \frac{\partial T}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \hat{\phi}, \\
 \nabla^2 T &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \\
 \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx &= \int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\
 &= \begin{cases} 0, & l' \neq l \\ \frac{2}{2l+1}, & l' = l \end{cases} \\
 P_0(x) &= 1; P_1(x) = x; P_2(x) = (3x^2 - 1)/2; P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2; \\
 P_4(x) &= (35x^4 - 30x^2 + 3)/8; P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8;
 \end{aligned}$$

QUESTÃO 2 – MAGNETOSTÁTICA

Numa pequena região sem corrente elétrica considere um campo magnético estático, não uniforme, $\vec{B}(x, y)$ paralelo ao plano xy , $B_z = 0$. A componente x do campo é dada por $B_x(x, y) = B_1 \sin(ky)$, onde k é uma constante positiva.

- (a) (20%) $B_x(x, y)$ poderia expressar um campo magnético se B_1 for independente da posição?. Justifique sua resposta.
- (b) (30%) Obtenha uma equação diferencial para $B_1(x)$. Sugestão: use a relação $\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$.
- (c) (30%) Admita que $B_1 = B_1(x)$ e que tenha um valor máximo B_M em $x = 0$, ou seja $B_1(x = 0) = B_M$ e $(\frac{dB_1}{dx})_{x=0} = 0$. Com essas informações determine as componentes B_x , B_y do campo.
- (d) (20%) Obtenha o potencial vetor $\vec{A}(x, y)$ associado ao campo.
-

QUESTÃO 3 – EQUAÇÕES DE MAXWELL

Suponha uma onda eletromagnética, que se propaga no vácuo, cujo campo elétrico é dado por:

$$\vec{E}(r, \theta, \phi, t) = E_0 \frac{\sin \theta}{r} [\cos(kr - \omega t) - (1/kr) \sin(kr - \omega t)] \hat{\phi}, \text{ com } \frac{\omega}{k} = c.$$

Para simplificar o cálculo das questões, faça a seguinte substituição $u = (kr - \omega t)$.

- (a) (30 %) Determine, em função de u , o campo magnético associado à onda eletromagnética.
 - (b) (30 %) Mostre que \vec{E} obedece as equações de Maxwell.
 - (c) (20 %) Calcule o vetor de Pointing \vec{S} e a intensidade ($I \equiv \langle S \rangle$) da onda eletromagnética.
 - (d) (20 %) Determine a potência total irradiada P pela onda eletromagnética.
-

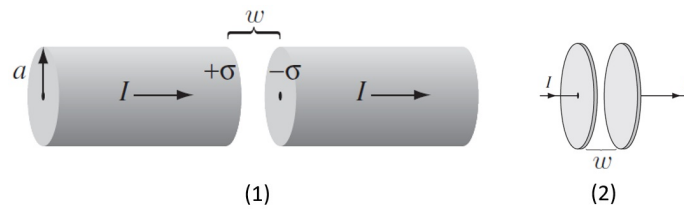
Dados:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \hat{\theta} \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi} \end{aligned}$$

QUESTÃO 4 – CORRENTE DE DESLOCAMENTO

Um fio de raio a carrega uma corrente constante I que está uniformemente distribuída na sua seção transversal. Um espaçamento fino no fio, de espesura $w \ll a$, forma um capacitor paralelo como mostrado na situação (1) abaixo. Esta configuração é um modelo artificial para a carga de um capacitor que evita complicações associadas com a corrente espalhando-se sobre a superfície das placas. Visando um modelo mais realista da situação, imaginamos agora fios “finos” conectando os centros de duas placas (situação (2)). Nesta situação a corrente I também é constante, o raio do capacitor é a e a separação das placas é $w \ll a$. Asuma que a carga na superfície é uniforme para qualquer tempo t e zero para $t = 0$;



- (a) (30%) Na situação (1), sem levar em conta a corrente de deslocamento, encontre o campo magnético dentro do espaçamento numa distância $s < a$, onde s é a distância ao eixo.
- (b) (40%) Na situação (2), encontre o campo elétrico entre as placas como função de t .
- (c) (30%) Na situação (2), calcule a corrente de deslocamento entre as placas a uma distância $s < a$ do eixo de simetria.
- (d) (30%) Na situação (2), e usando os resultados dos itens (b) e (c), calcule o campo magnético entre as placas a uma distância $s < a$ do eixo de simetria. Compare a sua resposta com o item (a) e discuta o resultado.