



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2020

Mecânica Estatística

04/03/2020 - 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1 – TERMODINÂMICA

Um sistema em equilíbrio térmico a uma temperatura T se comporta como uma mola de comprimento L que segue a lei de Hooke com uma constante elástica efetiva que depende da temperatura $k(T) = AT^\alpha$, onde A e α são constantes.

- (a) (40%) Obtenha a energia livre de Helmholtz $F(L, T)$.
 - (b) (30%) Calcule a entropia $S(L, T)$ em termos de $S(0, T)$.
 - (c) (30%) Determine a energia interna $U(L, T)$ em termos de $U(0, T)$.
-

QUESTÃO 2 – PARTÍCULAS CLÁSSICAS EM UM POTENCIAL HARMÔNICO

Considere N partículas clássicas de massa m submetidas a um potencial harmônico externo $V(\mathbf{r}_i) = m\omega^2|\mathbf{r}_i|^2/2$, onde $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ é o vetor posição da i -ésima partícula.

- (a) (40%) Calcule a função de partição canônica do sistema.
- (b) (40%) Calcule a energia média de uma partícula.
- (c) (20%) Calcule a energia média por grau de liberdade espacial e interprete o resultado em termos do teorema de equipartição de energia.

Dados:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 e^{-ax^2} = -\frac{d}{da} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} \right) = -\frac{d}{da} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

QUESTÃO 3 – ENSEMBLE CANÔNICO

Um gás unidimensional é formado por N esferas rígidas de diâmetro a que se movem ao longo de uma linha de comprimento L . Admita que o sistema está em equilíbrio a uma temperatura T .

(a) (20%) Escreva o potencial efetivo de repulsão das partículas do gás.

(b) (50%) Mostre que a função de partição do sistema é dada por

$$Z(T, L, N) = \frac{(L - Na)^N}{N! \lambda_T^N},$$

onde λ_T é o comprimento de onda térmico.

(c) (30%) Mostre que a equação de estado do gás é dada por $P(L - aN) = Nk_B T$. Interprete fisicamente este resultado.

QUESTÃO 4 – GÁS IDEAL QUÂNTICO

A função de partição grã-canônica de um gás ideal quântico é dada por

$$\mathcal{Z} = \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots} \exp \left(-\beta \sum_{\alpha} (\varepsilon_{\alpha} - \mu) n_{\alpha} \right),$$

onde $\beta = 1/(k_B T)$, $\varepsilon_{\alpha} \geq 0$ é a energia do estado quântico de uma partícula de rótulo α e n_{α} é o número de ocupação. Podemos considerar genericamente que n_{α} pode assumir os valores $0, 1, 2, \dots, m$, onde m é a ocupação máxima de um estado. Admita que T é a temperatura do banho térmico e que μ é o potencial químico.

- (a) (10%) Quais estatísticas quânticas são obtidas para os casos particulares $m = 1$ e $m = \infty$?
 - (b) (20%) Considere o caso intermediário (artificial) $m = 2$ e calcule a média estatística $\langle n_{\alpha} \rangle$ em função de ε_{α} , T , e μ .
 - (c) (30%) Sabendo que o potencial químico tende ao valor $\mu_0 > 0$ para $T \rightarrow 0$, determine para $m = 2$ como o número de ocupação médio $\langle n_{\alpha} \rangle$ depende de ε_{α} a temperatura zero.
 - (d) (40%) Admitindo $\varepsilon_{\alpha} = \hbar^2 \mathbf{k}^2 / (2m)$ para os estados quânticos de rótulo $\alpha = \mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, mostre que para $m = 2$ a equação de estado a temperatura zero é dada por $pV = (2/3)E$, onde p é a pressão e E é a energia do sistema.
-