



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado
Primeiro semestre de 2019

Eletrodinâmica Clássica

25/02/2019 - 09:00 às 12:00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1: ELETROSTÁTICA – MULTIPÓLOS

Em coordenadas esféricas, uma densidade de cargas é descrita pela função

$$\rho(r, \theta) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 e^{-r/r_0} \sin^2 \theta,$$

onde ρ_0 e r_0 são constantes.

- (35%) Determine os momentos de multipolo não nulos associados à distribuição de cargas.
- (35%) Mostre que na aproximação de campos distantes, o potencial associado à distribuição de cargas pode ser escrito como $V(r, \theta) \simeq \frac{a}{r} - \frac{b}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$, onde a e b são constantes.
- (30%) Calcule o campo elétrico $\vec{E}(r, \theta)$ associado ao potencial obtido no item b) e indique para quais valores de θ a componente radial de $\vec{E}(r, \theta)$ apresenta valores máximos e mínimos.

Dados:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} e^{im\phi} (\sin \theta)^{-m} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l}$$

$$\int_{2\pi}^0 d\phi \int_{\pi}^0 d\theta \sin \theta Y_l^{*m}(\theta, \phi) Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\text{Função Gama: } \Gamma(z) = \int x^{z-1} e^{-x} dx \text{ e } \Gamma(n) = (n-1)!$$

Expansão do potencial elétrico em termos dos harmônicos esféricos:

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_l^m(\theta, \phi)}{r^{l+1}}$$

QUESTÃO 2: ABSORÇÃO DIELÉTRICA

Considere um cabo coaxial cilíndrico de comprimento L , que tem duas camadas de materiais dielétricos diferentes dispostas entre seu núcleo condutor central, de raio a , e sua malha condutora externa, de raio b . A primeira camada, mais interna, de raios a e c , tem resistividade ρ_1 e constante dielétrica ε_1 . A segunda camada, mais externa e com raios c e b , tem resistividade ρ_2 e constante dielétrica ε_2 (Fig. 1).

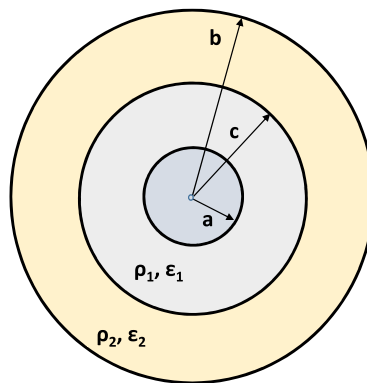


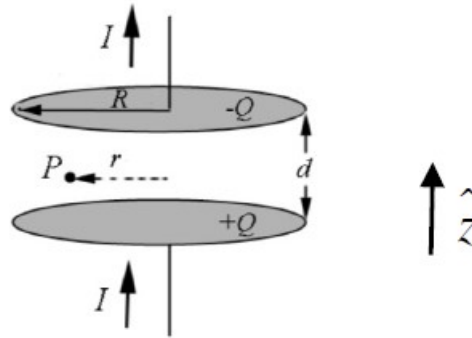
Figura 1

Quando uma diferença de potencial $V_{ba} > 0$ é aplicada entre o núcleo e a malha externa, uma corrente de fuga (“perda”) I_{rad} se estabelece radialmente através das camadas dielétricas.

- a) (30%) Determine o valor da resistência de fuga correspondente.
 - b) (20%) Determine a densidade de corrente na interface entre os dois dielétricos.
 - c) (25%) O núcleo e a malha externa se constituem nos dois “eletrodos” do cabo coaxial. Determine o valor das densidades de cargas superficiais que se acumulam em cada uma dessas duas regiões.
 - d) (25%) Determine o valor da densidade de carga superficial que se acumula na interface entre os dois dielétricos.
-

QUESTÃO 3: FLUXO DE ENERGIA EM UM CAPACITOR

Um circuito contém um capacitor de placas paralelas que consiste de duas placas circulares de raio R , separadas por uma distância d (Fig. 2). O capacitor se encontra inicialmente descarregado. Quando uma corrente I passa a fluir no circuito, as placas passam a acumular uma carga de módulo $Q(t)$.

**Figura 2**

- (25%) Desprezando os campos associados a efeitos de borda, determine a direção e magnitude do campo elétrico \vec{E} entre as placas e a energia total armazenada no campo elétrico do capacitor. Faça um esboço do comportamento do campo elétrico no interior do capacitor.
- (15%) Qual é a taxa de variação da energia armazenada no campo elétrico?
- (25%) Qual é a magnitude do campo magnético \vec{B} no ponto P localizado entre as placas (ver Fig. 2) a uma distância $r < R$ do eixo de simetria do sistema? Qual o sentido do campo magnético como visto ao longo de $-\hat{z}$? Faça um esboço da distribuição do campo magnético no interior do capacitor.
- (35%) Determine a direção e a magnitude do vetor de Poynting \vec{S} para $r = R$. Determine a taxa com que a energia flui para o interior do capacitor e interprete o resultado obtido.

QUESTÃO 4: MAGNETOSTÁTICA E LEI DE FARADAY

Considere um solenoide de comprimento $L = 50$ cm e com um raio interno $a = 5$ cm. Considere ainda que a indutância do solenoide é $L_0 = 50$ henries, que pelo solenoide pode passar uma corrente contínua máxima $I_{max} = 100$ A e que a razão entre o campo magnético B gerado e a corrente I passando por ele é $B/I = 0,1$ T/A. Para todos os efeitos considere o solenoide longo o suficiente para desprezar efeitos de borda. Calcule:

- a) (25%) A energia acumulada no solenoide quando $I = I_{max}$. Essa energia acumulada corresponde a que fração daquela fornecida por uma bateria de automóvel que pode suprir 40 Ah a uma tensão de 12 V.
- b) (25%) A tensão induzida V_B nos terminais do solenoide, considerando que a taxa de variação temporal do campo magnético é $dB/dt = 1$ T/s.
- c) (10%) Estime o número de espiras do solenoide.
- d) (20%) A tensão induzida V_{ind} gerada por um aumento infinitesimal no raio do solenoide (da) em um intervalo de tempo (dt).
- e) (20%) Demonstre que a pressão magnética na parede interna do solenoide é dada por $p = B^2/(2\mu_0)$. É importante lembrar que a conservação de energia requer que $dW_{circuito} = dU_{magnético} + dW_{mecânico}$, onde $dW_{circuito} = -V_{ind}Idt$ é o trabalho realizado pelo circuito elétrico com o aumento infinitesimal do raio do solenoide da em um intervalo de tempo dt , $dW_{mecânico} = pdV$ é o trabalho mecânico e $dU_{magnético}$ é o incremento na energia armazenada no campo magnético em razão do aumento do volume do solenoide dV . Estime ainda o valor da pressão magnética para $B = 10$ T.

Dados:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$
