

Anelle Cristine Brasileiro Valença

Estudo da Interação entre o Sistema Cardiovascular  
e o Respiratório à Luz da Teoria da Informação de  
Shannon

Recife

2006

**Universidade Federal de Pernambuco**  
**Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica**

**Estudo da Interação entre o Sistema Cardiovascular  
e o Respiratório à Luz da Teoria da Informação de  
Shannon**

**Dissertação**

submetida à Universidade Federal de Pernambuco  
como parte dos requisitos para obtenção do grau de

**Mestre em Engenharia Elétrica**

Anelle Cristine Brasileiro Valença

Recife, abril de 2006.

**Valença, Anelle Cristine Brasileiro**  
**Estudo da interação entre o sistema cardiovascular e o respiratório à luz da Teoria da Informação de Shannon / Anelle Cristine Brasileiro.**  
**Valença. – Recife : O Autor, 2006.**  
**x, 69 folhas : il., fig.**

**Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Engenharia Elétrica, 2006.**

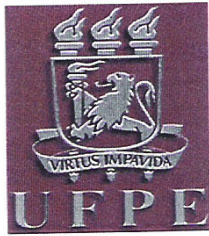
**Inclui bibliografia.**

**1. Engenharia elétrica – Engenharia de sistemas – Sistema cardiovascular e respiratório – Fisiologia. 2. Teoria da Informação de Shannon – Informação mútua e entropia. 3. Sistemas não-lineares – Sistemas de segunda ordem – Osciladores van der Pol simples e acoplados. I. Título.**

**621.3.01  
621.3**

**CDU (2.ed.)  
CDD (22.ed.)**

**UFPE  
BC2006-584**



**Universidade Federal de Pernambuco**  
**Pós-Graduação em Engenharia Elétrica**

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA DE  
TESE DE MESTRADO ACADÊMICO DE

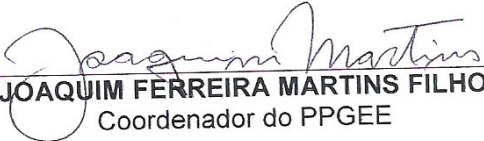
**ANELLE CRISTINE BRASILEIRO VALENÇA**

TÍTULO

**“ESTUDO DA INTERAÇÃO ENTRE O SISTEMA  
CARDIOVASCULAR E O RESPIRATÓRIO À LUZ DA TEORIA DA  
INFORMAÇÃO DE SHANNON”**

A comissão examinadora composta pelos professores:  
FERNANDO MENEZES CAMPELLO DE SOUZA, DES/UFPE, RICARDO  
MENEZES CAMPELLO DE SOUZA, DES/UFPE e HILTON DE CASTRO  
CHAVES JÚNIOR, DMC/UFPE, sob a presidência do primeiro, consideram o  
candidato **ANELLE CRISTINE BRASILEIRO VALENÇA**  
**APROVADA.**

Recife, 29 de abril de 2006.

  
\_\_\_\_\_  
**JOAQUIM FERREIRA MARTINS FILHO**  
Coordenador do PPGE

  
\_\_\_\_\_  
**FERNANDO MENEZES CAMPELLO**  
Orientador e Membro Titular Interno

  
\_\_\_\_\_  
**HILTON DE CASTRO CHAVES JÚNIOR**  
Membro Titular Externo

  
\_\_\_\_\_  
**RICARDO MENEZES CAMPELLO DE SOUZA**  
Membro Titular Interno

aos meus pais

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao meu pai, Mêuser Jorge Silva Valença, e a minha mãe, Cloris Maria Brasileiro Valença, por todo apoio e todo amor que me deram durante toda a minha vida e que tornaram possível a realização deste estudo.

As minhas duas irmãs, Lianne e Ivna, minha grande amiga, Isabela, e a Luciene por sempre terem tornado minhas voltas à realidade tão divertidas e tão felizes.

Ao meu Professor e Orientador, Dr. Fernando Menezes Campello de Souza pelos ensinamentos e brilhante orientação que foram primordiais para o resultado final deste trabalho.

Aos amigos Alice e André Leite que me ajudaram bastante com as ferramentas utilizadas.

Por fim, agradeço a todos que de maneira direta ou indireta me ajudaram na realização deste trabalho.

ANELLE CRISTINE BRASILEIRO VALENÇA

*Universidade Federal de Pernambuco*

*29 de abril de 2006*

Resumo da Dissertação apresentada à UFPE como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

# **Estudo da Interação entre o Sistema Cardiovascular e o Respiratório à Luz da Teoria da Informação de Shannon**

Anelle Cristine Brasileiro Valença

abril/2006

Orientador: Prof. Fernando Menezes Campello de Souza, Ph.D.

Área de Concentração: Sistemas

Palavras-chaves: Informação Mútua, Oscilador de van der Pol, Osciladores acoplados, Sistema cardiorespiratório

Número de páginas: 68

Estuda-se a dinâmica do sistema cardiorespiratório à luz da Teoria de Shannon. O estudo tem dois suportes metodológicos, um é o estudo de dois osciladores de van der Pol acoplados de diferentes maneiras e o outro é a ferramenta estatística, Informação Mútua, da Teoria da Informação de Shannon. Faz-se, primeiramente, uma revisão da fisiologia dos dois sistemas: o cardiovascular e o respiratório. Explora-se a interação entre a frequência respiratória e a frequência cardíaca como um possível marcador de eventuais disfunções fisiológicas. Analisa-se as possíveis formas de acoplamento entre dois osciladores de van der Pol. Os resultados reais, obtidos com o estudo de quatro pacientes do Instituto do Coração da Faculdade de Medicina da Universidade de São Paulo, confirmaram a grande potencialidade da ferramenta Informação Mútua como um indicador fisiológico.

Abstract of Dissertation presented to UFPE as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

# **Study of the interaction between cardiac and respiratory system in the light of the theory of Shannon**

Anelle Cristine Brasileiro Valença

april/2006

Supervisor: Prof. Fernando Menezes Campello de Souza, Ph.D.

Area of Concentration: Systems

Keywords: Mutual Information, van der Pol Oscillators, Coupled Oscillators, Cardiorespiratory System

Number of pages: 68

The dynamics of the cardiorespiratory system is studied in the light of the theory of Shannon. The study consists of two methodological bases: a. the study of two van der Pol oscillators coupled in different ways, and b. the statistics tool named Mutual Information, from Shannon's theory of information. First, physiology of both cardiovascular and respiratory systems is revised. Then, a quest is carried out pertaining the interaction between respiratory rate and cardiac rate, as a potential marker of any eventual physiological disfunctions. Possible coupling ways between two van der Pol oscillators are analysed. Actual results obtained through the study of four patients of the Instituto do Coração ("Heart Institute") of the Faculdade de Medicina da Universidade de São Paulo confirmed the great potentiality of the Mutual Information tool as a physiological indicator.



# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>iv</b>
<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Capítulo 1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	2
1.2 Objetivos . . . . .	3
1.3 Organização da dissertação . . . . .	3
<b>Capítulo 2 Elementos de Fisiologia do Sistema Cardiorespiratório</b>	<b>5</b>
2.1 Sistema Cardiovascular . . . . .	5
2.1.1 O Coração . . . . .	6
2.1.2 Sistema Circulatório . . . . .	11
2.2 Sistema Respiratório . . . . .	12
2.2.1 Ventilação Pulmonar . . . . .	13
2.2.2 Trocas Gasosas nos Alvéolos . . . . .	16
2.3 Influência do sono . . . . .	18
2.4 Análise Não-Linear . . . . .	18
<b>Capítulo 3 Informação Mútua</b>	<b>20</b>
3.1 Introdução . . . . .	20
3.2 Teoria da Informação . . . . .	21
3.2.1 A Medida de Hartley . . . . .	21

3.2.2	A Medida de Shannon . . . . .	22
3.3	Informação Mútua . . . . .	25
3.3.1	Propriedades . . . . .	26
3.4	Informação Mútua Generalizada . . . . .	26
3.4.1	Aplicações . . . . .	28
3.5	Estimação da Informação Mútua . . . . .	29
3.5.1	Estimação da IMG . . . . .	29
<b>Capítulo 4 Sistemas Não-lineares</b>		<b>32</b>
4.1	Sistemas de 2ª Ordem . . . . .	33
4.1.1	Análise pelo Plano de Fase . . . . .	34
4.1.2	Ciclos Limite . . . . .	37
4.2	Oscilador de van der Pol . . . . .	39
4.3	Estudo de Efeitos Não-lineares . . . . .	41
4.3.1	Análise por Funções Descritivas . . . . .	41
4.3.2	Sincronização . . . . .	43
4.3.3	Encarrilhamento de Freqüência . . . . .	46
4.4	Osciladores Acoplados . . . . .	47
4.4.1	Metrônimos como Osciladores Acoplados . . . . .	48
4.4.2	Acoplamentos entre Osciladores de van der Pol . . . . .	49
4.4.3	Existência de Ciclo limite para Equações de van der Pol Acopladas	52
4.4.4	Interações Cardiorespiratórias . . . . .	52
<b>Capítulo 5 Análise dos resultados</b>		<b>54</b>
5.1	Osciladores Acoplados . . . . .	55
5.1.1	Acoplamento Unidirecional . . . . .	55
5.1.2	Acoplamento Bidirecional . . . . .	57
5.2	IM no Sistema Cardiorespiratório . . . . .	59
<b>Capítulo 6 Conclusões</b>		<b>64</b>
6.1	Sugestões para futuros estudos . . . . .	65
<b>Referências</b>		<b>66</b>

# Lista de Figuras

2.1	O coração humano e suas partes. . . . .	7
2.2	Sistema eletrogênico do coração. . . . .	8
2.3	Tempo de propagação do impulso cardíaco. . . . .	8
2.4	Eventos durante o ciclo cardíaco. . . . .	10
2.5	Sistema circulatório. . . . .	12
2.6	Sistema respiratório. . . . .	13
2.7	Troca gasosa. . . . .	17
3.1	Gráficos das funções $\ln x$ e $x - 1$ . . . . .	24
4.1	Foco estável (à esquerda) e foco instável (à direita). . . . .	35
4.2	Nó estável (à esquerda) e nó instável (à direita). . . . .	36
4.3	Centro. . . . .	36
4.4	Ponto de sela. . . . .	36
4.5	Ciclo limite. . . . .	37
4.6	Estabilidade de ciclos limite. . . . .	38
4.7	Resposta do oscilador de van der Pol para $\alpha = 0.2$ . . . . .	41
4.8	Resposta do oscilador de van der Pol para $\alpha = 3$ . . . . .	42
4.9	Sistema não-linear sem entrada. . . . .	42
4.10	Sistema não-linear com entrada forçada. . . . .	44
4.11	Gráfico 1 . . . . .	45
4.12	Gráfico 2 . . . . .	45
4.13	Resposta do oscilador de van der Pol com entrada forçada $\text{sen } 1,2t$ para $\alpha = 0,25$ . . . . .	47
4.14	Metronomos entrando em sincronismo . . . . .	49

5.1	Osciladores de van der Pol com acoplamento unidirecional. . . . .	55
5.2	Resposta dos osciladores acoplados para $c_1 = 0,5$ . . . . .	56
5.3	Informação Mútua Generalizada para diferentes defasagens para $c_1 =$ $0,5$ . . . . .	56
5.4	Resposta dos osciladores acoplados para $c_1 = 4$ . . . . .	57
5.5	Informação Mútua Generalizada para diferentes defasagens para $c_1 = 4$ .	57
5.6	Osciladores de van der Pol com acoplamento bidirecional. . . . .	58
5.7	Resposta dos osciladores acoplados para $c_1 = 0,25$ e $c_2 = 1,5$ . . . . .	58
5.8	Informação Mútua Generalizada para diferentes defasagens para $c_1 =$ $0,25$ e $c_2 = 1,5$ . . . . .	59
5.9	Cálculo da frequência cardíaca e amostragem do sinal da respiração. .	60
5.10	IM referente ao paciente1. . . . .	60
5.11	IM referente ao paciente2. . . . .	61
5.12	IM referente ao paciente3. . . . .	62
5.13	IM referente ao paciente4. . . . .	63

# Capítulo 1

## Introdução

As doenças do sistema cardiovascular são as causas de mais de 16 milhões de mortes em todo mundo e só no Brasil esse número foi maior do que 250 mil no ano de 2002. As doenças cardiovasculares, em países em desenvolvimento, estão associadas a cinco fatores de risco: tabagismo, uso de álcool, hipertensão arterial, colesterol alto e obesidade; os quais podem ser controlados e tratados para prevenir tais disfunções. É devido a esse fato que busca-se entender de forma cada vez mais profunda a fisiologia do sistema cardiovascular e todos os subsistemas que com ele interagem [2].

A Teoria da Informação é uma disciplina científica que foi iniciada por Claude Shannon [10] no artigo intitulado “*A Mathematical Theory of Communication*” e cujos objetivos são, entre outros, estabelecer limitantes teóricos de desempenho para sistemas de transmissão ou de armazenamento de informação e tratar quantitativamente o conceito de informação. Neste trabalho, Shannon apresentou uma medida de informação, ou seja, uma quantidade que mede quanta informação é produzida por um dado processo. Esta medida foi denominada entropia. A partir da entropia, surgiu o conceito de Informação Mútua que é a quantidade de informação ganha sobre um sistema através da medida de outro, ou seja, é a medida da redução média na incerteza (entropia) sobre uma variável através do conhecimento do valor da outra.

O coeficiente de correlação linear é a medida mais conhecida de dependência estatística entre duas variáveis aleatórias, mas este coeficiente mede apenas dependências estatísticas lineares, não sendo útil para determinar dependência em séries onde existe qualquer tipo de não-linearidade. A Informação Mútua surge, então, como uma alternativa à tradicional técnica de análise por correlação por oferecer uma medida

que detecta dependências estatísticas, tanto lineares como não-lineares, entre séries temporais.

Muitos sistemas físicos podem ser modelados de forma precisa como sistemas não-lineares por apresentarem uma dinâmica muito mais complexa e muitos fenômenos que não são observados nos sistemas lineares. O oscilador de van der Pol é um dos primeiros exemplos de sistema físico que exibe ciclo limite e é bastante aplicado em várias áreas de pesquisa numa tentativa de modelar os fenômenos não-lineares. Essa aplicação começou por Van der Pol, em 1920, quando ele utilizou três desses osciladores para modelar o batimento do coração [23]. Osciladores biológicos são encontrados em vários níveis de complexidade em quase todos os organismos vivos e um dos sistemas fisiológicos mais interessantes e complexos é o sistema cardiovascular.

A dinâmica de dois osciladores acoplados vem sendo bastante estudada para modelar fenômenos biológicos através de diferentes formas de acoplamentos entre os osciladores [32, 33, 30, 31]. O estudo de osciladores acoplados envolve uma variedade de campos de pesquisa como matemática, biologia, neurociência, robótica, eletrônica e economia, entre outros. Os elementos essenciais do estudo de sistemas de osciladores não-lineares acoplados são as oscilações auto-sustentáveis ou forçadas e um acoplamento suficientemente forte entre eles, permitindo comportamentos temporais complexos que capturam algumas das características de fenômenos naturais irregulares.

Portanto, neste trabalho, utilizaremos estas ferramentas como suporte para o estudo da dinâmica do sistema cardiorespiratório.

## 1.1 Motivação

O entendimento do Sistema Cardiorespiratório para a extração dos possíveis indicadores de patologias fisiológicas tem exigido, cada vez mais, técnicas mais sofisticadas.

Recentemente, a ferramenta estatística Informação Mútua vem sendo aplicada em diversos campos de pesquisa, como uma medida de acoplamento ou de transmissão de informação entre diferentes sistemas.

Dessa forma, a motivação do trabalho veio da possibilidade de obter-se, através da ferramenta Informação Mútua, um esclarecimento maior sobre as interações entre

o Sistema Cardiovascular e o Respiratório.

## 1.2 Objetivos

- Estudar a fisiologia do Sistema Cardiovascular e do Sistema Respiratório;
- Entender o funcionamento desses Sistemas como osciladores acoplados, através de osciladores de van der Pol;
- Avaliar o potencial da ferramenta Informação Mútua como possível marcador de eventuais disfunções fisiológicas no Sistema Cardiorespiratório.

## 1.3 Organização da dissertação

Esta dissertação está dividida em seis capítulos. Neste, apresenta-se uma breve introdução com o objetivo de chamar a atenção para as metodologias empregadas, continuando com a apresentação de alguns aspectos motivadores para a sua realização e seus objetivos. Nos demais, serão apresentados os seguintes conteúdos:

- Capítulo 2 - Elementos de Fisiologia do Sistema Cardiorespiratório

Faz-se um estudo da fisiologia dos sistemas cardiovascular e respiratório. A descrição dos sistemas é, de certa forma, elementar sob o ponto de vista da medicina e detalhada sob o ponto de vista da engenharia. Na abordagem do sistema cardiovascular dá-se ênfase ao estudo do coração e do sistema circulatório; na do sistema respiratório, deu-se destaque ao estudo da ventilação pulmonar e ao das trocas gasosas nos alvéolos.

- Capítulo 3 - Informação Mútua

Faz-se uma breve abordagem sobre a Teoria da Informação, onde é estudada a entropia de Shannon e a Informação Mútua. Apresenta-se, ainda, uma extensão do conceito da Informação Mútua, baseada na entropia generalizada de Rényi, que é a Informação Mútua Generalizada.

- Capítulo 4 - Sistemas Não-lineares

Estudam-se alguns fenômenos característicos dos Sistemas Não-lineares. Os Sistemas de 2ª Ordem são analisados por serem capazes de modelar de forma precisa muitos sistemas físicos. É dada uma maior atenção ao oscilador de van der Pol por ter sido um dos primeiros exemplos de sistemas físicos inventados a exibir ciclos limites. O estudo dos efeitos não-lineares dá ênfase à sincronização e ao encarrilhamento de frequência. Por fim, faz-se uma pesquisa de diversos tipos de acoplamento entre osciladores, e comenta-se sobre as interações cardiorespiratórias.

- Capítulo 5 - Análise dos resultados

Utiliza-se a ferramenta Informação Mútua para quantificar o acoplamento entre dois sistemas,  $X$  e  $Y$ . Primeiramente, simula-se dois osciladores de van der Pol, acoplados de maneiras diferentes, que fazem o papel dos sistemas  $X$  e  $Y$ . Na segunda parte, os sistemas em questão serão o sistema respiratório e o cardiovascular. Analisa-se, ainda, alguns dados cedidos pelo InCor - HCFMUSP (Instituto do Coração do Hospital das Clínicas da Faculdade de Medicina da Universidade de São Paulo) onde a informação mútua é utilizada para medir o possível acoplamento entre os dois sistemas.

- Capítulo 6 - Conclusões

Apresenta-se algumas conclusões e sugestões para trabalhos futuros.



# Capítulo 2

## Elementos de Fisiologia do Sistema Cardiorespiratório

Revisam-se alguns conhecimentos sobre a fisiologia dos sistemas cardiovascular e respiratório. É feita uma descrição dos sistemas de uma forma elementar sob o ponto de vista da medicina e, de uma certa forma, detalhada sob o ponto de vista da engenharia, mas de grande serventia para garantir uma área mínima de interação entre as duas epistemologias. O texto que segue é baseado essencialmente em [1, 2, 3, 4, 5].

### 2.1 Sistema Cardiovascular

O sistema cardiovascular é formado por um órgão propulsor de sangue, o coração, e por uma vasta rede de tubos de vários tipos e calibres que envolve todo o corpo humano. À passagem do sangue por este sistema dá-se o nome de circulação sanguínea ou “rede de transporte” do organismo.

Este sistema executa tarefas de distribuição, transporte e recolhimento de diversas substâncias por todo o organismo com grande eficiência que garantem condições ótimas de sobrevivência e de funcionamento das células:

- Transporte de gases;
- Transporte de nutrientes;
- Transporte de resíduos metabólicos;

- Transporte de hormônios;
- Intercâmbio de materiais;
- Transporte de calor;
- Distribuição de mecanismos de defesa;
- Coagulação sanguínea. [6]

### 2.1.1 O Coração

O coração é um órgão muscular que pesa cerca de 400 gramas e tem o tamanho de um punho fechado, aproximadamente, em uma pessoa adulta. Está localizado abaixo do osso anterior do tórax, chamado de esterno.

Ele é composto por dois sistemas de bombeamento independentes, cada um desses sistemas tem duas câmaras - um átrio e um ventrículo. Um dos sistemas, o coração direito, bombeia sangue para os pulmões, enquanto o outro, o coração esquerdo, bombeia sangue para os órgãos periféricos. O funcionamento do átrio é como o de uma fraca bomba de escova para o ventrículo. Ele ajuda a passagem do sangue para o ventrículo que aplica a força principal para a saída do sangue para as circulações.

#### **Impulsos Elétricos Ritmados no Coração**

Existe um sistema eletrogênico no coração responsável por geração e condução de impulsos elétricos ritmados que controlam as contrações cardíacas. O impulso rítmico normal é gerado no nodo sinoatrial ou sinusal, uma pequena faixa achatada e elipsóide de músculo especializado, que está localizada perto da junção entre o átrio direito e a veia cava superior. O nodo sinoatrial possui fibras que têm a capacidade de auto-excitação (processo que pode produzir descarga e contração rítmica automáticas) em maior grau comparadas com as demais fibras cardíacas. Por isso, é o nodo sinoatrial que, normalmente, controla a frequência dos batimentos cardíacos.

As fibras do nodo sinoatrial conectam-se diretamente às fibras musculares atriais, de forma que, todo impulso produzido pelo nodo sinoatrial é rapidamente transmitido para as fibras atriais, atravessando toda a massa de músculo atrial e, finalmente, atinge o nodo Atrioventricular (A-V) com apenas 0,03s de atraso.

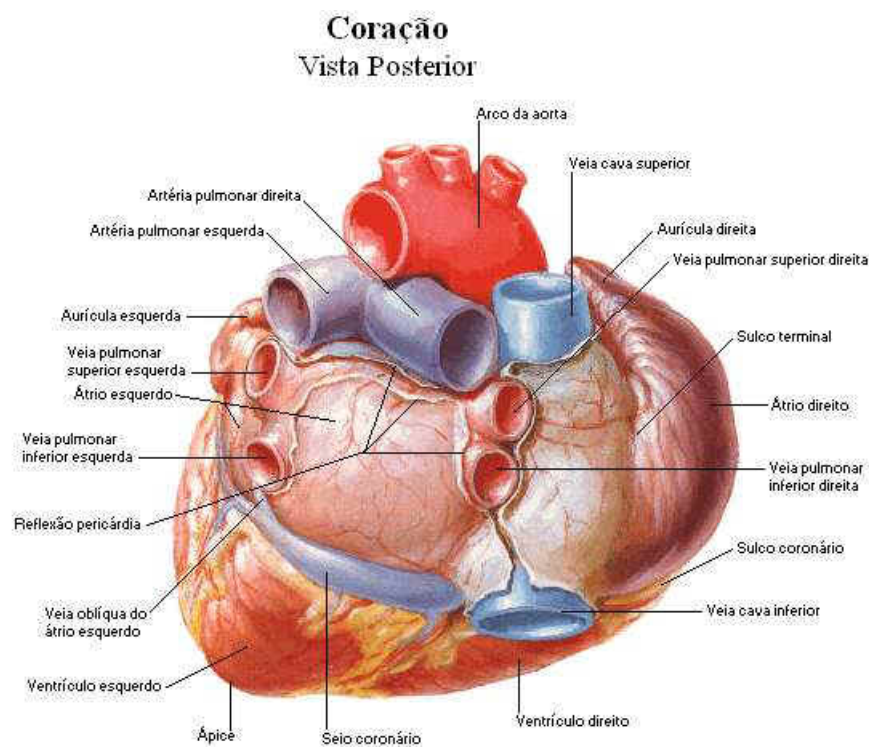


Figura 2.1: O coração humano e suas partes.

No entanto, o nodo A-V e o feixe A-V retardam a transmissão do impulso em cerca de 0,13s. De forma que, o sinal excitatório sofre um retardo total de 0,16s desde o nodo sinoatrial até atingir o músculo contrátil ventricular.

Esse retardo que ocorre no sistema de condução do impulso cardíaco, na sua passagem do átrio para o ventrículo, é fundamental para que os átrios esvaziem seu sangue nos ventrículos, permitindo assim um enchimento adicional dos últimos, antes do bombeamento do sangue para os pulmões e para a circulação periférica.

As fibras de Purkinje saem do nodo A-V, passam pelo feixe A-V que se divide nos ramos esquerdo e direito, se distribui em direção ao ápice do ventrículo, decompondo-se em ramos cada vez menores que se espalham ao redor de cada câmara ventricular e retornam para a base do coração, conectando-se com as fibras musculares cardíacas. O impulso cardíaco se propaga quase que imediatamente do ramo do feixe para as terminações das fibras de Purkinje, apenas 0,03s. Neste momento, o impulso é conduzido pelas fibras musculares do ventrículo a uma velocidade de apenas um sexto da velocidade nas fibras de Purkinje, de forma que, o tempo para que o impulso consiga

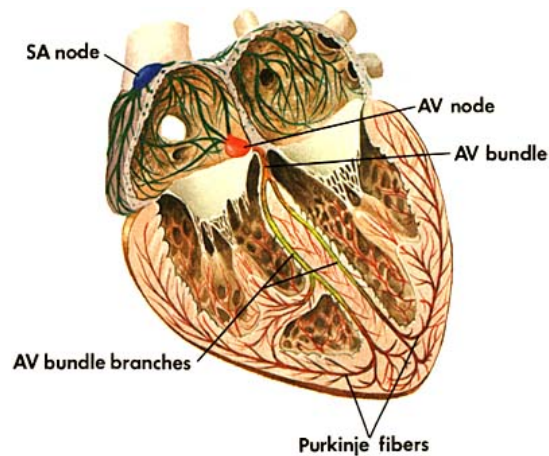


Figura 2.2: Sistema eletrogênico do coração.

atingir a última fibra muscular ventricular é de aproximadamente 0,06s.

Na figura 2.3 pode-se acompanhar os intervalos de tempo, em segundos, desde a origem do impulso no nodo sinoatrial até atingir cada parte correspondente do coração.

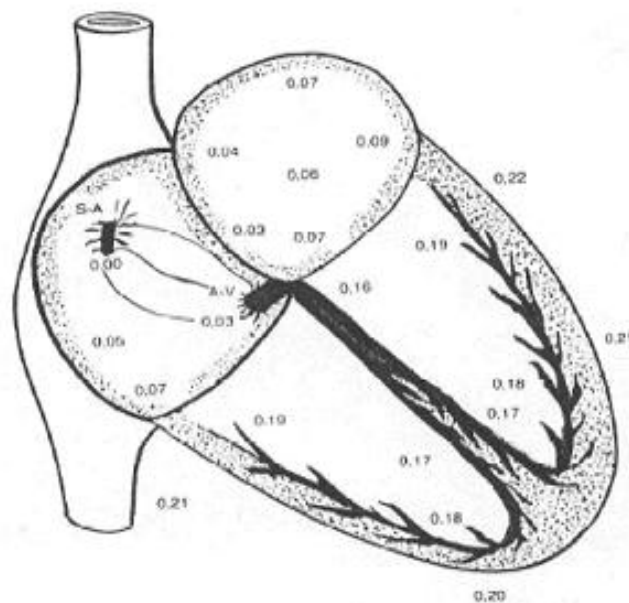


Figura 2.3: Tempo de propagação do impulso cardíaco.

Normalmente, o impulso é originado no nódo sinoatrial, um oscilador natural que gera um sinal quase-periódico com frequência de 70-80 bpm. As fibras do nodo

A-V, quando não estimuladas por uma fonte externa, oscilam numa frequência de 40-60 bpm e as fibras de Purkinje numa frequência de 15-40 bpm.

No funcionamento normal, o nodo sinoatrial descarrega seu impulso para o nodo A-V e para as fibras de Purkinje. Como sua frequência rítmica de descarga é maior que nas outras partes do coração, o nodo sinoatrial controla o batimento cardíaco, e sua frequência é imposta aos outros dois osciladores pelo fenômeno do encarrilhamento de frequência [2, 1].

### **Eletrocardiograma**

Quando o impulso elétrico se propaga pelos tecidos do coração, há uma disseminação de correntes elétricas pelos tecidos adjacentes ao coração e uma pequena parte desta corrente chega à superfície do corpo. Para registrar estes sinais, são colocados eletrodos sobre a pele em pontos opostos do coração de modo a registrar a diferença de potencial. Este registro é denominado eletrocardiograma. Um eletrocardiograma de uma pessoa saudável, mostrado na figura 2.4, é formado pela onda P, pelo complexo QRS e pela onda T. O complexo QRS é, freqüentemente, formado por três ondas diferentes, a onda Q, a onda R e a onda S. A onda P é causada pela despolarização dos átrios, o complexo QRS é resultante da despolarização dos ventrículos antes da contração e a onda T é conseqüente da repolarização dos ventrículos.

### **Eventos do Ciclo Cardíaco**

O ciclo cardíaco se caracteriza pelos eventos cardíacos que ocorrem entre os inícios de dois batimentos cardíacos adjacentes. Ele é composto basicamente por um período de relaxamento, a diástole, e um período de contração, a sístole. A figura 2.4 apresenta os vários eventos que aparecem durante o ciclo cardíaco.

Durante a sístole, com o fechamento das válvulas A-V, aparece a onda v na curva da pressão atrial devido ao fluxo lento de sangue vindo das veias. Com o final da sístole, as pressões ventriculares caem a valores abaixo da pressão em que os átrios se encontram de forma a promover a abertura da válvula A-V e um conseqüente enchimento dos ventrículos. Esse enchimento rápido dura um terço da diástole. Em seguida, uma pequena quantidade de sangue flui para os ventrículos, vindo dos átrios. E no último terço da diástole ocorre a contração atrial, mostrada pela onda da curva

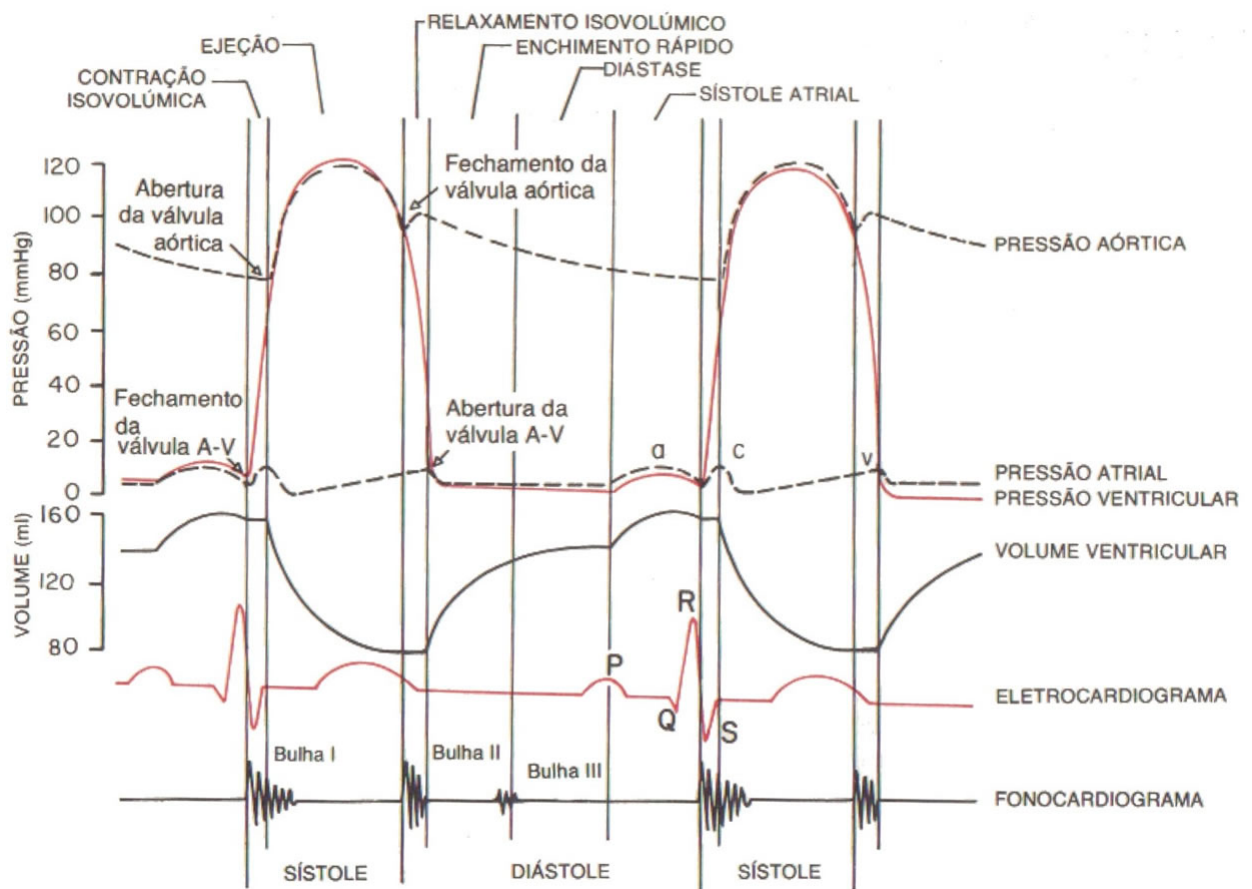


Figura 2.4: Eventos durante o ciclo cardíaco.

da pressão atrial, responsável pelo enchimento adicional de 25% dos ventrículos.

Quando os ventrículos se contraem, a pressão ventricular aumenta rapidamente, fechando as válvulas A-V. Neste momento, ocorre a onda c na curva da pressão atrial, em parte por um pequeno refluxo de sangue para os átrios e, principalmente, pelo abaulamento das válvulas A-V em direção aos átrios por causa da pressão nos ventrículos. Até a pressão ventricular conseguir chegar a um valor suficiente para promover a abertura das válvulas semilunares (aórtica e pulmonar), ocorre contração sem esvaziamento. Esse período é chamado de contração isovolumétrica.

Com a abertura das válvulas semilunares, ocorre, já no primeiro terço do período de ejeção, 70% do esvaziamento dos ventrículos, o que é chamado período de ejeção rápida. E os terços finais, responsáveis pelo esvaziamento dos 30% restantes, são chamados período de ejeção lenta.

No final da sístole, com o relaxamento ventricular, as pressões intraventriculares

diminuem permitindo, assim, o fechamento das válvulas semilunares. O músculo ventricular continua a relaxar, mas o volume não se altera, caracterizando assim o período chamado relaxamento isovolumétrico. Quando as pressões intraventriculares passam a valores mais baixos que as pressões atriais, as válvulas A-V abrem-se, começando mais um ciclo.

## 2.1.2 Sistema Circulatório

Antes de discutir o funcionamento do sistema circulatório, é importante conhecer as partes que compõem esta rede de transporte do organismo e suas respectivas funções. A rede vascular de distribuição é classificada como segue.

As artérias, vasos com paredes resistentes, transportam o sangue do coração para os tecidos sob alta pressão. Elas ramificam-se, diminuindo progressivamente os seus calibres.

As arteríolas, últimas ramificações do sistema arterial, possuem parede muscular forte capaz de alterar o seu próprio diâmetro do vaso e atuam como reguladoras do sangue para os capilares.

Os capilares são uma rede de vasos de paredes delgadas e permeáveis cuja função é realizar troca de líquidos, nutrientes, eletrólitos, hormônios e outras substâncias entre o sangue e o líquido intersticial.

O sangue é então coletado pelas vênulas que unem-se formando veias cada vez maiores.

As veias são condutos de paredes delgadas, suficientemente musculares para se contrair, ou se expandir, que transportam o sangue dos tecidos de volta para o coração e também atuam como reservatório controlável de sangue extra.

Este sistema é dividido em dois tipos de circulação: a circulação sistêmica, ou periférica, que atende a todos os tecidos do corpo, com exceção dos pulmões, e a circulação pulmonar.

O lado direito do coração recebe o sangue vindo de todo o corpo, através das veias cavas inferior e superior. Esse sangue, pobre em oxigênio e rico em dióxido de carbono, é recebido pelo átrio direito e logo passa para o ventrículo direito. A circulação pulmonar inicia-se no momento em que o ventrículo direito expelle o sangue

venoso através da artéria pulmonar, fazendo-o passar pelas ramificações e capilares localizados nos pulmões, onde ocorrerá a troca de gases, restaurando assim a taxa de oxigênio do sangue; e termina quando o sangue oxigenado atinge o átrio esquerdo passando através da veia pulmonar.

O átrio esquerdo recebe o sangue oxigenado vindo dos pulmões que segue para o ventrículo esquerdo, a bomba mais forte das câmaras do coração, que impulsiona o sangue oxigenado para todo o corpo, através da artéria aorta, começando assim a circulação sistêmica. Por meio dos capilares, o sangue, ao nível dos tecidos, nutre e retira as impurezas dos órgãos humanos. O sangue, agora venoso, retorna ao átrio direito, através das veias cavas, completando assim a circulação sistêmica. A figura 2.5 mostra o desenho esquemático deste sistema.

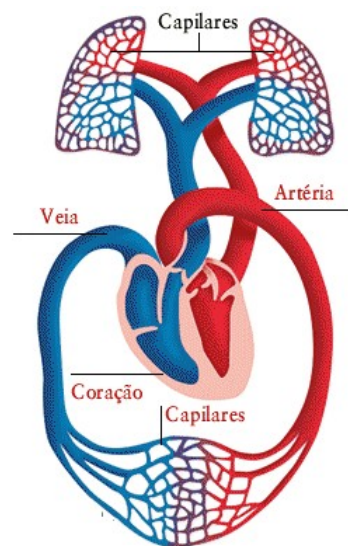


Figura 2.5: Sistema circulatório.

## 2.2 Sistema Respiratório

O sistema respiratório é constituído por um par de pulmões e por vários órgãos que conduzem o ar para dentro e para fora das cavidades pulmonares: as fossas nasais, a boca, a faringe, a laringe, a traquéia, os brônquios, os bronquíolos e os alvéolos, sendo que os três últimos estão localizados no interior dos pulmões.

A respiração consiste em uma troca gasosa entre o organismo e o meio ambiente



com o objetivo de fornecer oxigênio aos tecidos e remover o dióxido de carbono. A necessidade do organismo por um sistema de transporte para garantir essas trocas gasosas é atendida em parte pelo sistema respiratório e em parte pelo sistema circulatório.

Para desempenhar essas funções, a respiração é dividida em quatro eventos: a ventilação dos pulmões, a difusão do oxigênio e do dióxido de carbono entre o sangue e os alvéolos, o transporte do oxigênio e do dióxido de carbono e a regulação da respiração.

## 2.2.1 Ventilação Pulmonar

### Mecânica Respiratória

O movimento de expansão e contração dos pulmões se dá basicamente por dois mecanismos: pelo movimento do diafragma e pela elevação e depressão das costelas.

Durante a inspiração ocorre a contração do diafragma que traciona a superfície inferior dos pulmões para baixo e uma elevação da caixa torácica através dos músculos inspiratórios. Esses dois mecanismos promovem uma expansão dos pulmões.

Já na expiração, ocorre o processo inverso: o diafragma se relaxa e, através de um movimento passivo, os músculos expiratórios “puxam” para baixo as costelas inferiores, diminuindo assim o volume da caixa torácica.

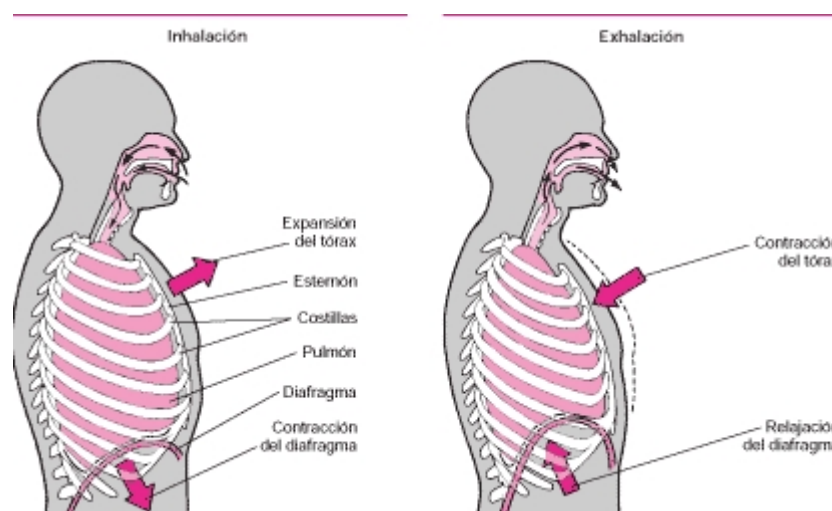


Figura 2.6: Sistema respiratório.

## O Motor da Ventilação

O motor das trocas gasosas entre os alvéolos e o meio ambiente é constituído pelas diferenças de pressão que existem entre os dois meios.

Para que os movimentos do diafragma e da caixa torácica sejam utilizados para a ventilação, é necessário que os pulmões consigam seguir esses movimentos. O pulmão é uma estrutura elástica que, sem uma força para mantê-lo inflado, colapsa, expelindo todo seu ar pela traquéia devido à sua própria elasticidade. Ele flutua na cavidade torácica, estando preso apenas ao mediastino por meio de seu hilo e é circundado por uma película fina de líquido pleural. Existe uma sucção contínua do líquido pleural pelos canais linfáticos, fazendo com que ocorra uma aderência dos pulmões à parede torácica. Dessa forma, os pulmões parecem estar colados a ela, porém podem deslizar livremente na expansão e contração da caixa torácica.

Essa sucção do líquido pleural provoca uma pressão ligeiramente negativa, denominada pressão pleural. Na inspiração, esta pressão fica ainda mais negativa devido à expansão da caixa torácica que puxa os pulmões para fora com força maior.

A pressão do ar no interior dos alvéolos é chamada de pressão alveolar. Quando a glote está aberta, essa pressão é igual à atmosférica. Durante a inspiração, a pressão nos alvéolos deve ser inferior à pressão atmosférica, de forma que o volume pulmonar deve aumentar. Enquanto que, na expiração, a pressão nos alvéolos deve ser maior que a pressão atmosférica, condição atendida pela diminuição do volume pulmonar.

A diferença entre a pressão alveolar e a pressão pleural é denominada pressão transpulmonar. Ela fornece uma medida das forças elásticas nos pulmões que tendem a conduzir o colapso dos mesmos a cada momento da respiração. É a pressão exercida pelos tecidos pulmonares. O grau de expansão que os pulmões experimentam para cada unidade de aumento na pressão transpulmonar é referido como a complacência pulmonar.

## Volumes e Capacidades Respiratórias

Em cada respiração normal, o volume de ar inspirado ou expirado é chamado volume corrente e seu valor é , em média, 0,5 litro. Então, durante uma inspiração, 0,5 litro de ar penetra nos pulmões. À este volume, pode se somar ainda 3 litros de ar

através de uma inspiração forçada, que é o volume de reserva inspiratório. Através de uma expiração forçada, pode-se eliminar um volume de ar de aproximadamente 1,1 litros, em condições normais, além do volume de expiração corrente; denomina-se este volume de volume de reserva expiratório. E o volume que permanece nos pulmões mesmo após uma expiração forçada com esforço máximo é chamado volume residual que é , em geral, cerca de 1,2 litros.

Algumas vezes é conveniente, para a descrição dos ciclos respiratórios, considerar combinações de dois ou mais volumes pulmonares. Estas combinações são denominadas capacidades pulmonares.

A capacidade inspiratória é o volume máximo de ar que pode ser inspirado, ou seja, é a soma do volume corrente com o volume de reserva inspiratório. A capacidade funcional residual é a quantidade de ar que continua nos pulmões após uma expiração normal, é o volume residual somado com o volume de reserva expiratório. A quantidade máxima de ar que pode ser expelida dos pulmões após uma inspiração forçada é a capacidade vital que é a soma do volume corrente, do volume de reserva inspiratório e do volume de reserva expiratório. E a capacidade pulmonar total é a soma de todos os volumes pulmonares.

Todos os volumes e capacidades dos pulmões dependem do sexo e do porte físico de cada indivíduo. São medidos através da espirometria. No entanto, a espirometria só mede aqueles volumes e capacidades que entram e saem dos pulmões, não conseguindo medir o volume residual.

### **Ventilação dos Alvéolos**

O volume corrente, durante uma respiração normal em repouso, preenche toda a árvore respiratória até os bronquíolos terminais, e só pequena parcela do ar inspirado chega, por difusão, aos alvéolos.

A troca gasosa ocorre nos alvéolos e nos bronquíolos respiratórios. A região das vias aéreas que não participa das trocas gasosas é denominada espaço morto. A intensidade com que o ar fresco alcança as áreas onde ocorre as trocas gasosas é denominada ventilação alveolar. É um dos principais fatores que determinam as concentrações do oxigênio e do dióxido de carbono nos alvéolos.

## 2.2.2 Trocas Gasosas nos Alvéolos

Com a ventilação dos alvéolos, ocorre a difusão do oxigênio na direção dos alvéolos para o sangue pulmonar e a difusão do dióxido de carbono no sentido oposto.

### Composição do Ar nos Alvéolos

A composição do ar alveolar difere da composição do ar atmosférico. Antes mesmo de chegar aos alvéolos, o ar é umidificado pelas vias aéreas. Durante a respiração, o oxigênio do ar alveolar é constantemente consumido pelo sangue pulmonar, enquanto o dióxido de carbono é difundido, constantemente, do sangue pulmonar para os alvéolos. Além disso, a cada respiração, o ar alveolar não é totalmente substituído.

Apenas uma parte do ar fresco chega aos alvéolos a cada respiração normal, de forma que apenas um sétimo do volume de ar alveolar é substituído pelo ar atmosférico fresco. Essa substituição lenta do ar alveolar evita alterações súbitas das concentrações de gases no sangue. Permite, assim, um mecanismo de controle da respiração muito mais estável, evitando aumentos ou reduções excessivos na concentração tecidual de oxigênio e dióxido de carbono e no pH dos tecidos num caso onde a respiração é temporariamente interrompida.

As concentrações e as pressões parciais do oxigênio e do dióxido de carbono, nos alvéolos, são determinadas pelas intensidades de absorção, ou de excreção, dos dois gases e também pelo nível de ventilação alveolar.

### Difusão dos Gases

Cerca de 300 milhões de alvéolos encontram-se nas extremidades das ramificações terminais da árvore respiratória dos pulmões. Eles possuem paredes extremamente finas e são envolvidos por uma rede densa de capilares pulmonar. Essa rede de capilares funciona como um lençol de sangue fluindo, fazendo com que os gases alveolares estejam próximos do sangue capilar. Então, as trocas gasosas entre o ar alveolar e o sangue pulmonar acontecem nesta membrana respiratória.

A diferença entre a pressão parcial do gás nos alvéolos e a pressão do mesmo gás no sangue capilar é a medida da tendência do movimento das moléculas do gás através da membrana. No caso do oxigênio, a sua pressão parcial nos alvéolos é maior do

que sua pressão no sangue capilar, de forma que ocorre difusão dos alvéolos para o sangue. Já o dióxido de carbono apresenta uma pressão no sangue capilar superior à pressão parcial nos alvéolos, provocando uma difusão na direção do sangue para os alvéolos.

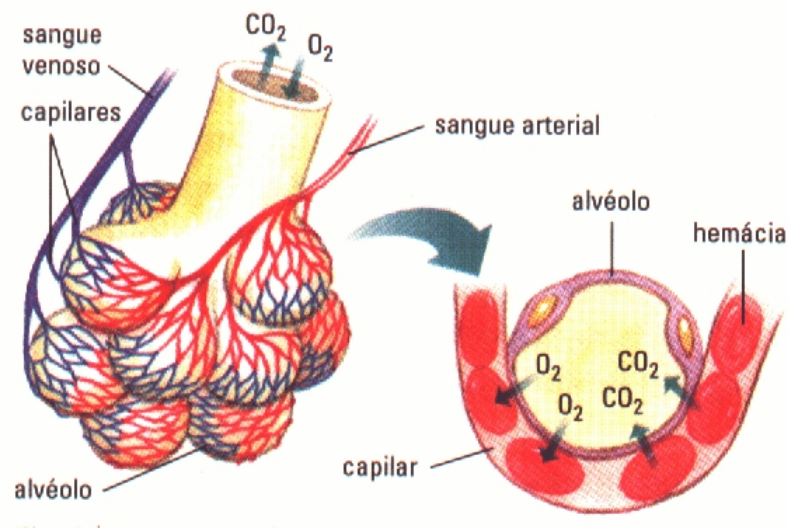


Figura 2.7: Troca gasosa.

Dois fatores determinam as pressões do oxigênio e do dióxido de carbono nos alvéolos: a ventilação alveolar e a velocidade das trocas através da membrana respiratória.

Até agora considerou-se que a ventilação dos alvéolos é uniformemente distribuída e que o fluxo sanguíneo capilar é o mesmo para cada alvéolo. No entanto, existem situações nas quais ou a ventilação pulmonar é suficiente, mas o fluxo sanguíneo não ou o fluxo sanguíneo é muito bom, mas a área tem pouca ventilação.

Nestas situações, com ventilação e fluxo sanguíneo direcionados para diferentes áreas dos pulmões, as trocas gasosas ficam altamente prejudicadas. O conceito de ventilação-perfusão foi criado para ajudar a compreender as trocas gasosas na ausência de balanço entre a ventilação alveolar e o fluxo sanguíneo capilar. Ela é expressa como a razão entre a ventilação e o fluxo sanguíneo alveolar.

Se a ventilação alveolar e o fluxo sanguíneo são normais para um dado alvéolo, a conseqüente relação ventilação-perfusão será considerada normal. Quando a razão ventilação-perfusão é muito pequena, as pressões dos gases nos alvéolos são iguais às do sangue e quando a relação é muito grande, as pressões dos gases nos alvéolos

são iguais às pressões do ar umidificado. Nos casos extremos onde a razão é zero, sem ventilação, ou infinito, sem fluxo sanguíneo, não haverá trocas gasosas através da membrana respiratória dos alvéolos afetados.

## 2.3 Influência do sono

As funções do cérebro e do organismo em geral são influenciadas pela alternância da vigília com o sono. Em uma noite de sono, os sistemas e funções fisiológicas sofrem alterações acompanhando os ciclos ultradianos.

O sono é dividido em duas categorias: sono REM ("Rapid Eye Movements") e sono não NREM ("Non-Rapid Eye Movements") e este é classificado em 4 fases. Durante o período de sono, normalmente ocorrem de 4 a 6 ciclos bifásicos com duração de 90 a 100 minutos cada, sendo cada um dos ciclos composto pelas fases de NREM, com duração de 45 a 85 minutos, e pela fase de sono REM, que dura de 5 a 45 minutos. São três os parâmetros fisiológicos básicos utilizados para definir os estágios do sono: o eletrencefalograma (EEG), o eletroculograma (EOG) e o eletromiograma (EMG).

A cada momento do sono (REM e NREM) as respostas do organismo serão diferentes: Nas funções Cardiovasculares, a pressão arterial diminui durante o sono chegando a seu mínimo no sono NREM. Durante o sono pesado a pressão arterial sofre variações de até 40 mmHg, sendo que quando o indivíduo acorda o valor da pressão volta aos níveis normais. A frequência cardíaca também diminui nesta fase de sono; ocorre também mudanças respiratórias onde durante o sono REM a respiração se torna mais rápida e irregular gerando os surtos apnéicos e hipoventilação. A apnéia em recém nascidos pode causar a morte súbita do lactente [8].

## 2.4 Análise Não-Linear

O objetivo final de uma descrição física de um sistema é uma formulação matemática como um conjunto de equações diferenciais. E, para chegar a tal descrição, deve-se aprender o possível sobre o sistema em questão. A análise de sistemas complexos, como é o sistema circulatório e suas interações com o sistema nervoso autônomo, requer uma estratégia de abordagem. Uma linha geral para a modelagem de sistemas

complexos consiste nas seguintes etapas: A formulação do problema; o estabelecimento de objetivos e critérios; a inspeção preliminar e classificação do sistema; a determinação preliminar das relações entre os subsistemas; uma análise das variáveis e das relações para se obter um conjunto simples, porém representativo do processo em estudo; uma modelagem matemática das relações em termo das variáveis e dos parâmetros; a avaliação de quão bem o modelo representa o sistema real; a aplicação do modelo; e a interpretação e compreensão dos resultados [2].

# Capítulo 3

## Informação Mútua

### 3.1 Introdução

A medida de dependências estatísticas dentro de uma série temporal ou entre séries diferentes é um dos problemas fundamentais em análises de classificação e séries temporais [13, 14].

A mais conhecida medida de dependência entre duas variáveis aleatórias é o coeficiente de correlação linear. Entretanto, esse coeficiente mede apenas dependências estatísticas lineares; de forma que, para determinar dependência em séries onde existe algum tipo de não-linearidade nos dados, essa medida pode não ser útil [16].

Como uma alternativa à tradicional análise por correlação, a análise por informação mútua (IM) nos oferece uma medida que detecta dependências estatísticas, tanto lineares como não-lineares, entre séries temporais. A IM entre medidas geradas pelo sistema  $X$ ,  $x_i$  e o sistema  $Y$ ,  $y_i$ , é a quantidade de informação que a medida  $x_i$  oferece sobre  $y_i$ . Então, IM é uma medida do acoplamento dinâmico ou da transmissão de informação entre esses sistemas. A IM representa uma medida da “força” da dependência estatística [17, 18]. Segundo Pompe et al. [17]:

*“IM é invariante em distorções monotônicas dos sinais, o que está em contraste com a correlação. Disso, podemos esperar obter um entendimento mais profundo sobre a interação dos dois sistemas através de uma análise com IM”.*

O conceito de IM vem da teoria da informação e, desde sua introdução por



Shannon [10], ela tem sido utilizada em diversas áreas como uma medida de acoplamento ou de transmissão de informação entre diferentes sistemas.

## 3.2 Teoria da Informação

Teoria da Informação é o nome dado a uma disciplina científica que teve origem com a publicação do artigo intitulado “*A Mathematical Theory of Communication*” por Claude Shannon [10]. O trabalho foi publicado no *Bell System Technical Journal* e foi um artigo de grande importância para a história da engenharia.

Os objetivos desta disciplina são estabelecer limitantes teóricos de desempenho para sistemas de transmissão ou de armazenamento de informação, tratar quantitativamente o conceito de informação, entre outros.

A primeira etapa deste estudo é voltada para a definição de uma medida de informação e para a investigação das propriedades dessa medida.

### 3.2.1 A Medida de Hartley

O único trabalho de que se tem conhecimento na literatura, anterior ao de Shannon, é um artigo de 1928 escrito por R.V.L. Hartley, “*Transmission of information*”, *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 3, July 1928, pp. 535-564 [11]. Hartley percebeu alguns aspectos essenciais da informação; e, talvez, o mais importante aspecto observado tenha sido a percepção que a recepção de um símbolo só fornece informação se este pertencer a um conjunto de pelo menos dois símbolos, ou seja, se este representar o valor de uma variável aleatória. Sistemas de comunicações devem ser implementados para transmitir quantidades aleatórias e não para reproduzir senóides determinísticas. Essa foi uma idéia bastante radical e os engenheiros da época demoraram para assimilá-la [9, 12].

A medida de informação de Hartley foi desenvolvida de acordo com o seguinte raciocínio. Considera-se que um símbolo  $X$  pode apresentar  $D$  valores diferentes;  $n$  símbolos desse teria então  $D^n$  possibilidades distintas. Dessa forma, a informação que é gerada pela ocorrência desses  $n$  símbolos deveria ser igual a  $n$  vezes a informação

gerada por um único símbolo desse. Sugeriu-se então que

$$I(X) = \log_b(D) \quad (3.1)$$

seria uma medida de informação (provida pela observação de uma variável aleatória discreta  $X$ ) apropriada, já que:  $\log_b(D^n) = n * \log_b(D)$  (onde  $D$  é o número de possíveis valores de  $X$ ). A base  $b$  do logaritmo estabelece o tamanho da unidade de informação. No entanto, a medida de Hartley apresenta uma falha que pode ser observada considerando-se o seguinte experimento aleatório no qual  $X$  assume o valor da cor da bola retirada de uma caixa, onde existem bolas azuis e rosas. Pela medida de Hartley, a informação fornecida pela retirada de uma bola da caixa seria de um dígito binário de informação, já que tem-se duas possibilidades para a variável aleatória  $X$  e  $I(X) = \log_2(2) = 1\textit{bit}$ , independente da proporção entre bolas rosas e azuis dentro da caixa. No entanto, intuitivamente, percebe-se que, numa situação onde a caixa contém apenas uma bola rosa e o restante azul, a incerteza é menor (ou seja, fornece menos informação) que em outra situação onde a caixa tivesse o mesmo número de bolas rosas e azuis. Esse problema ocorre porque esta medida ignora as probabilidades de ocorrência dos diversos valores de  $X$  [9, 12].

### 3.2.2 A Medida de Shannon

Após 20 anos da publicação do artigo de Hartley, Shannon propôs uma nova medida de informação.

Nesse artigo [10], é apresentada uma quantidade que irá medir quanta informação é produzida por um dado processo: Supondo um conjunto de eventos possíveis com probabilidades de ocorrência  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , sendo essas probabilidades tudo o que se sabe sobre qual evento irá ocorrer, é possível obter uma medida de quanta incerteza se tem sobre a saída? Se tal medida,  $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ , existe, é razoável pensar que ela deve satisfazer as seguintes propriedades:

1.  $H$  deve ser contínua em  $p_i$ .
2. Se os  $p_i$  são iguais,  $p_i = \frac{1}{n}$ , então  $H$  deve ser uma função monotônica crescente em  $n$ . Com eventos igualmente prováveis, quanto maior for o número de eventos, maior será a incerteza envolvida no processo.

3. Se uma escolha for dividida em duas escolhas sucessivas, a  $H$  inicial deve ser a soma ponderada dos valores individuais de  $H$ .

Shannon chegou à conclusão que o único  $H$  satisfazendo as três propriedades acima seria da forma:

$$H = -K \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (3.2)$$

onde  $K$  é uma constante positiva.

Shannon chamou essa medida de entropia e a definiu da seguinte forma:

**Definição 3.1** *A entropia  $H(X)$  de uma variável aleatória  $X$  é a quantidade*

$$H(X) = - \sum_{x_i} P(x_i) \log P(x_i) \quad (3.3)$$

Esse conceito de entropia é associado ao conceito de incerteza e não de informação. Informação, segundo Shannon, está sempre associada à redução de incerteza.

Entropia de um sistema é a quantidade média de incerteza obtida de alguma observação de  $X$ .

### Desigualdade Fundamental da Teoria da Informação

Para um número  $x$  real e positivo,

$$\ln x \leq x - 1 \quad (3.4)$$

com igualdade se, e somente se,  $x = 1$

### Propriedade da Função Entropia

**Teorema 3.1** *Para uma variável aleatória  $X$  com  $K$  valores possíveis  $0 \leq H(X) \leq \log K$ ; com igualdade à esquerda se, e somente se, um dos  $p_i$  tiver o valor um e o resto for zero, ou seja,  $H(X)$  só é zero quando temos certeza sobre a saída (determinismo); e com igualdade à direita se, e somente se, todos os  $p_i$  forem iguais a  $\frac{1}{K}$  (essa é a situação que apresenta maior incerteza).*

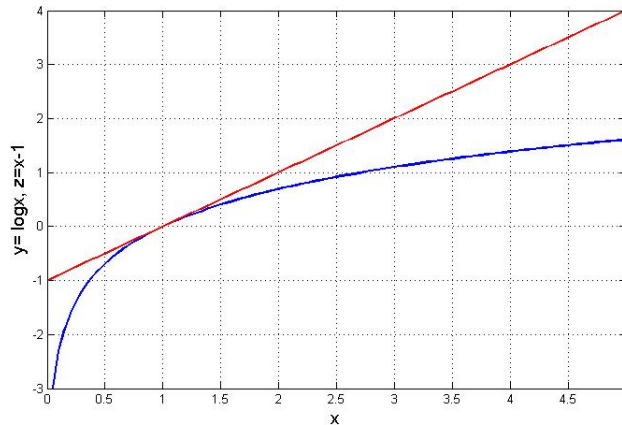


Figura 3.1: Gráficos das funções  $\ln x$  e  $x - 1$

### Entropia Condicional

Define-se a entropia condicional da variável aleatória discreta  $X$ , dado que o evento  $Y = y$  ocorre, da seguinte forma:

$$H(X|Y = y) = - \sum_{x: P(x|y) \neq 0} P(x|y) \log P(x|y) \quad (3.5)$$

Do teorema anterior, decorre que:

**Corolário 3.1**  $0 \leq H(X|Y = y) \leq \log K$  com igualdade à esquerda se, e somente se,  $P(x|y) = 1$  para algum valor de  $x$ , e com igualdade à direita se, e somente se,  $P(x|y) = \frac{1}{K}$ ,  $\forall x$ .

A entropia condicional da variável aleatória discreta  $X$ , dada a variável aleatória discreta  $Y$ , é definida como a média da entropia condicional de  $X$  dado o evento  $Y = y$ , tomada sobre todos os valores possíveis de  $Y$ .

$$H(X|Y) = \sum_{y: P(y) \neq 0} P(y) H(X|Y = y). \quad (3.6)$$

Após o desenvolvimento matemático simples com o auxílio da definição de entropia conjunta, chega-se ao seguinte resultado:

$$H(X) \geq H(X|Y) \quad (3.7)$$

com igualdade se, e somente se,  $X$  e  $Y$  forem estatisticamente independentes. Essa é a segunda desigualdade da teoria da informação. Ela apresenta uma interpretação

intuitiva agradável, já que o conhecimento de uma das variáveis aleatórias,  $Y$ , nunca aumenta a nossa incerteza sobre  $X$ , diminuindo-a em geral ou deixando essa medida inalterada no caso de  $X$  e  $Y$  serem estatisticamente independentes.

Como  $H(X|Y) \leq H(X) \therefore 0 \leq H(X|Y) \leq \log K$  com igualdade à direita se, e somente se,  $X$  e  $Y$  forem estatisticamente independentes e  $P(x) = \frac{1}{K}$  para todo  $x$ , e igualdade à esquerda se, e somente se, para todo  $y$  tal que  $P(y) \neq 0$  existir um  $x$  tal que  $P(x|y) = 1$ , ou seja, a variável aleatória discreta  $Y$  essencialmente determina a variável aleatória discreta  $X$ . De (3.5) e (3.6),

$$H(X|Y) = - \sum_{y: P(y) \neq 0} P(y) \sum_{x: P(x|y) \neq 0} P(x|y) \log P(x|y) \quad (3.8)$$

### 3.3 Informação Mútua

A IM pode ser considerada como uma generalização do conceito de correlação (covariância normalizada).

**Definição 3.2** *A Informação Mútua é a medida da redução média na incerteza sobre  $x$ , através do conhecimento do valor de  $y$ . Ou seja, é a quantidade de informação que a variável aleatória  $Y$  dá sobre a variável aleatória  $X$ .*

A IM quantifica a informação ganha sobre um sistema através de medida de outro. Quando consideramos a IM entre dois sistemas diferentes  $X$  e  $Y$ , essa IM é chamada de informação mútua cruzada (IMC). A IMC quantifica a informação transmitida de um sistema para outro. Ela é o análogo não-linear da tradicional correlação cruzada. Já a IM entre duas medidas de uma única série temporal  $x(t)$  separadas por um tempo é chamada de auto informação mútua (AIM), que é o análogo não-linear da função de auto-correlação [17, 18].

Enquanto a incerteza a priori em  $X$  é  $H(X)$ , a incerteza a posteriori em  $X$ , dado uma medida de  $y$ , é:

$$H(X|Y) = \sum_{y_i} P(y_i) H(X|Y = y_i), \quad (3.9)$$

onde

$$H(X|Y = y) = - \sum_{x_i} P(x_i|y) \log P(x_i|y) \quad (3.10)$$

Então, a quantidade que uma medida de  $y$  reduz na incerteza de  $x$  é:

$$I(X; Y) = H(X) - H(X| Y) \quad (3.11)$$

Essa é a expressão que define a IM entre as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  [18]. Ela representa a medida da força da dependência estatística entre as duas variáveis, e então pode ser considerada com uma medida de acoplamento.

### 3.3.1 Propriedades

1. IM é uma relação simétrica

$$I(X; Y) = I(Y; X);$$

2. IM é não-negativa

$$I(X; Y) \geq 0;$$

3. IM detecta independência estatística

$$I(X; Y) = 0 \Leftrightarrow X \text{ e } Y \text{ são estatisticamente independentes};$$

4. IM detecta determinismo

$$I(X; Y) = H(X) \Leftrightarrow X \text{ é uma função de } Y$$

e vice-versa

$$I(X; Y) = H(Y) \Leftrightarrow Y \text{ é uma função de } X;$$

5. IM é invariante sob distorções monotônicas do sinal.

## 3.4 Informação Mútua Generalizada

A informação mútua generalizada (IMG) é uma extensão do conceito da IM, baseada numa medida de informação generalizada chamada entropia generalizada de Rényi. Esse conceito é um progresso na direção da eficiência computacional e robustez do algoritmo que é utilizado para estimação da IM [17, 19, 20].

Para uma variável aleatória discreta  $X$ , com distribuição de probabilidade

$$P = \{p_m\}_{m=1}^M,$$

a entropia de Rényi de ordem  $\alpha$  é definida para qualquer distribuição discreta  $P = \{p_m\}$  como:

$$H_\alpha(P) \equiv \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \log \sum_{m=1}^M p_m^\alpha & , \text{ para } \alpha \geq 0, \alpha \neq 1 \\ - \sum_{m=1}^M p_m \log p_m & , \text{ para } \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.12)$$

assumindo as convenções  $0^0 \equiv 0$ ,  $0 \log 0 \equiv 0$ .

Para  $\alpha = 1$  temos a representação da entropia de Shannon,  $H_1(P)$  e  $H_0(P)$  representa a entropia de Hartley.

Considerando uma nova variável aleatória discreta  $Y$  com distribuição de probabilidade

$$Q = \{q_n\}_{n=1}^N$$

e denotando a distribuição de probabilidade conjunta do vetor aleatório  $(X, Y)$  por

$$S = \{s_{mn}\}_{m,n=1}^{M,N},$$

define-se, então, as seguintes quantidades:

$$H_\alpha(S | P) \equiv H_\alpha(S) - H_\alpha(P) \quad (3.13)$$

$$I_\alpha(S) \equiv H_\alpha(Q) - H_\alpha(S | P) \quad (3.14)$$

Para  $\alpha = 1$  obtemos a IM com suas propriedades apresentadas anteriormente.

Para uma distribuição  $S$  qualquer, a quantidade  $I_\alpha(S)$  é não negativa somente para  $\alpha = 0$  ou  $1$ . Para as demais ordens a informação mútua  $I_\alpha(S)$  pode ser negativa, e não somos capazes de detectar uma independência estatística entre  $X$  e  $Y$  quando a mesma obtiver valor zero. No entanto, há bastante interesse no caso  $\alpha = 2$  porque  $I_2(S)$  pode ser estimada muito eficientemente da série temporal [19, 13].

Através do seguinte teorema, podemos contornar esse problema:

**Teorema 3.2** *Seja  $P = \{p_m\}_{m=1}^M$ ,  $Q = \{q_n\}_{n=1}^N$  e  $S = \{s_{mn}\}_{m,n=1}^{M,N}$  as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias discretas  $X, Y$  e do vetor aleatório  $(X, Y)$ , respectivamente. Suponha que  $Y$  é uniformemente distribuída, isto é,  $q_n = N^{-1}$  para todo  $n = 1, 2, \dots, N$ . Então,  $I_2(S)$  definida pela equação (3.14) satisfaz*

$$0 \leq I_2(S) \leq H_2(Q) = \log N. \quad (3.15)$$

De forma que  $I_2$  apresenta as mesmas propriedades de  $I_1$ :

$$I_2(S) = 0 \Leftrightarrow X \text{ e } Y \text{ são estatisticamente independentes;}$$

$$I_2(S) = H_2(Q) \Leftrightarrow Y \text{ é uma função de } X.$$

A denominação de informação mútua generalizada para  $I_2(S)$  foi motivada por esse teorema. É importante lembrar que, por esse teorema, nós definimos uma IMG somente se uma das variáveis aleatórias for uniformemente distribuída [13, 14].

As propriedades essenciais da IMG são bastante similares às da IM. A principal razão para consideração da IMG em vez da IM é que a medida de informação de Rényi pode ser mais facilmente estimada usando um algoritmo que já é bastante conhecido no cálculo da dimensão de correlação de uma medida fractal, o algoritmo Grassberger Procaccia Takens (GPTA) [14, 20].

### 3.4.1 Aplicações

De acordo com Pompe [19], a IM é muito útil tanto para analisar dependências estatísticas em séries temporais como para detectar períodos fundamentais e também, detectar vetores de tempo ótimos para previsões.

Para esse estudo, iremos utilizar sua funcionalidade para detectar vetores de tempo ("time combs") ótimos para previsão e modelagem. Quando queremos prever, por exemplo, um valor futuro  $x_{t+\tau}$  através de valores passados  $(x_{t+\vartheta_D}, \dots, x_{t-\vartheta_1})$ , estamos interessados em saber qual vetor de tempo  $(\vartheta_D, \dots, \vartheta_1)$  nos dá o máximo de informação sobre  $x_{t+\tau}$  e quantos valores passados, isto é, a dimensão  $D$  do vetor de tempo nos oferece praticamente toda informação sobre ele [19].

Essas observações do passado podem ser do mesmo processo ou de outros processos que estejam relacionados com a quantidade que iremos prever. Em geral, existe um



grande número de observações e temos que decidir quais observações são importantes para a previsão. Temos, então, que procurar um subconjunto  $X^*$  do conjunto  $X$  de variáveis aleatórias, que nos ofereça a máxima informação para a nossa previsão; ou seja, qualquer variável adicional de  $X$  nada nos adicionará na nossa previsão. Além disso, por razões práticas, devemos tentar basear nossas previsões no menor número de observações que forneça toda informação relevante para previsão [20].

Uma medida de complexidade das séries temporais é a taxa de decaimento da AIM com o crescimento das defasagens no tempo. O primeiro mínimo local da AIM da série temporal tem sido utilizado em análises não-lineares de sistemas dinâmicos para determinar o tempo de defasagem,  $\tau$ , ótimo [18].

### 3.5 Estimação da Informação Mútua

A dificuldade em calcular a informação mútua de uma série temporal reside no fato de que a probabilidade conjunta é desconhecida. Existem duas estratégias para a estimação da IM ou IMG. Uma maneira é primeiramente estimar as probabilidades, ou densidades, e daí calcular as entropias para finalmente calcular a IM, de acordo com as definições dadas; e a outra, consiste numa estimação direta ([19, 14]).

No primeiro método, para estimar as densidades, utiliza-se histogramas que podem ser de células equidistantes ou células equiprováveis. Além dos histogramas, podem ser utilizados também métodos de Kernel bem estabelecidos para estimação da densidade ([15, 16]).

No segundo, as entropias são estimadas diretamente, o que é feito com bastante eficiência utilizando as integrais de correlação ([17]).

#### 3.5.1 Estimação da IMG

O procedimento para a estimação da IMG é baseado no algoritmo Grassberger-Procaccia-Takens (GPTA) que foi originalmente utilizado para calcular dimensão fractal e uma entropia métrica generalizada na teoria do caos ([14]).

Considere a série temporal multivariada:

$$\{\mathbf{x}_t\}, \mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^{D+1}$$

$$\mathbf{x}_t \equiv \{x(t - \vartheta_D), \dots, x(t - \vartheta_1), x(t)\}$$

onde os componentes  $x(t - \vartheta_D), \dots, x(t - \vartheta_1), x(t)$  de  $\mathbf{x}_t$  podem representar diferentes quantidades ou versões deslocadas da série escalar original.

O Algoritmo para estimação da IMG segue os seguintes passos:

- O primeiro passo é um certo tipo de pré-processamento dos dados. É feita uma transformação da série temporal para sua correspondente série de “rank numbers”.

$$\{\mathbf{x}(t)\}_{t=1}^T \longrightarrow \{\mathbf{R}(t)\}_{t=1}^T \quad (3.16)$$

onde

$$\mathbf{R}(t) = \#\{t^* : \mathbf{x}(t^*) \leq x(t), 1 \leq t^* \leq T\} \quad (3.17)$$

e  $\#$  significa a cardinalidade do conjunto.

A série de dados “Ranked” é uma permutação de  $\{1, 2, \dots, T\}$ . É uma transformação inversível do dado para uma distribuição uniforme no conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, T\}$ .

$$\mathbf{R}(t) \equiv (R(t - \vartheta_D), \dots, R(t - \vartheta_2), R(t))_{t=1}^T \quad (3.18)$$

- O segundo passo é calcular as seguintes integrais de correlação:

$$C_{D, \epsilon} \equiv N_{total}^{-1} \#\{(t_1, t_2) : \|\mathbf{R}(t_2) - \mathbf{R}(t_1)\|_{max, D} < \epsilon\} \quad (3.19)$$

escolhido um certo nível de “coarse-graining”, tal que  $1 \ll \epsilon \ll T$ , onde  $\vartheta_D \leq t_1 < t_2 \leq T$  e

$$N_{total} = \frac{(T - \vartheta_D)(T - \vartheta_D - 1)}{2} \quad (3.20)$$

e

$$C_{D+1, \epsilon(\tau)} \equiv N_{total}^{-1}(\tau) \#\{(t_1, t_2) : \|\mathbf{R}(t_2, \tau) - \mathbf{R}(t_1, \tau)\|_{max, D+1} < \epsilon\} \quad (3.21)$$

com  $1 + \vartheta_D \leq t_1 < t_2 \leq T - \tau$  e

$$N_{total}(\tau) = \frac{(T - \vartheta_D - \tau)(T - \vartheta_D - \tau - 1)}{2}, \quad (3.22)$$

de forma que as aproximações

$$C_{D,\epsilon} \simeq \sum_m p^2 m, \quad (3.23)$$

$$C_{D+1,\epsilon(\tau)} \simeq \sum_{m,n} p^2 mn(z), \quad (3.24)$$

são garantidas quando  $T \rightarrow \infty$  e  $\frac{2\epsilon}{T} \equiv \varepsilon \rightarrow 0$

Devido à uniformidade da distribuição da série “*Rank numbers*”, a integral de correlação para  $D = 1$  e  $1 < \epsilon < \infty$  pode ser calculada como:

$$\begin{aligned} C_{1,\epsilon} &= \frac{2(\epsilon - 1)}{T - 1} - \frac{\epsilon(\epsilon - 1)}{T(T - 1)} \\ \lim_{T \rightarrow \infty} C_{1,\epsilon} &= \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \simeq \varepsilon \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\varepsilon = \text{const} \ll 1 \quad ([19, 13, 14])$$

Lembrando a definição de Informação Mútua Generalizada de segunda ordem:

$$\begin{aligned} I_2(S) &= H_2(Q) - H_2(S|P), \\ &= H_2(Q) + H_2(P) - H_2(S). \end{aligned}$$

Sendo  $P = \{p_m\}_{m=1}^M$ ,  $Q = \{q_n\}_{n=1}^N$  e  $S = \{s_{mn}\}_{m,n=1}^{M,N}$  as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias  $X, Y$  e do vetor aleatório  $(X, Y)$ , respectivamente; supondo  $Q$  uniformemente distribuída, e

definindo  $\varepsilon \equiv N^{-1}$ , tem-se

$$I_2(S) = -\log \varepsilon - \log \sum_m p^2 m + \log \sum_{m,n} s^2 mn. \quad (3.26)$$

De forma que o estimador,  $\hat{I}_2$ , pode ser definido por:

$$\begin{aligned} \hat{I}_2(D, Z) &\equiv -\log C_{1,\epsilon} - \log C_{D,\epsilon} + \log C_{D+1,\epsilon(Z)} \\ &= \log \frac{C_{D+1,\epsilon(Z)}}{C_{1,\epsilon} C_{D,\epsilon}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

# Capítulo 4

## Sistemas Não-lineares

Ao contrário dos sistemas lineares, que são caracterizados por satisfazerem o princípio da superposição, os sistemas não-lineares não obedecem a esse princípio. A ausência de uma propriedade unificadora que os caracterize torna sua sistematização mais difícil de fazer do que a dos sistemas lineares. As não-linearidades podem ser naturais, inerentes do modelo da planta, ou podem ser intencionalmente introduzidas pelo projetista com o objetivo de poder controlar ou mesmo de melhorar o comportamento dos sistemas [21, 22].

Os sistemas não-lineares, por ter uma dinâmica muito mais complexa, apresentam muitos fenômenos que não são observados nos sistemas lineares. Alguns fenômenos que apenas acontecem nos sistemas não-lineares são:

- Múltiplos pontos de equilíbrio

Pontos de equilíbrio são aqueles pontos em que todo estado que nele se inicia permanece inalterado. Num sistema não-linear pode haver outros pontos de equilíbrio, diferentes da origem, que o sistema pode aproximar-se no decorrer do tempo.

- Bifurcações

Bifurcação é uma dependência crítica particular nos parâmetros, de forma que, variações nestes, acarretam uma mudança qualitativa no comportamento do sistema.

- Caos ou dependência crítica das condições iniciais

Nos sistemas não-lineares as soluções podem ser extremamente sensíveis a variações das condições iniciais, sendo a saída, a partir de certo valor de tempo, imprevisível.

- Ciclos limite ou oscilações

São oscilações com amplitude e frequência constantes, ou seja, são instabilidades periódicas de amplitude finita. A amplitude das oscilações não depende de pequenas variações nos parâmetros do sistema nem das condições iniciais. Além disso, a forma da oscilação não é necessariamente senoidal.

- Fenômeno do salto

Quando a frequência da entrada é aumentada, um salto pode ocorrer na amplitude da resposta. Quando a frequência é reduzida, um salto ocorrerá novamente, mas em uma frequência diferente.

- Existência de harmônicas e subharmônicas

Um sistema não-linear com uma entrada periódica pode exibir uma saída periódica cuja frequência é subharmônica ou super-harmônica da frequência de entrada.

Existem dois métodos principais para se descrever sistemas dinâmicos: equações diferenciais, que descrevem a evolução dos sistemas no tempo contínuo e as equações diferenças, que tratam dos sistemas onde o tempo é discreto. Entre as equações diferenciais, a principal distinção é entre equação diferencial parcial e ordinária. A equação diferencial ordinária envolve apenas uma variável independente, o tempo  $t$  e a parcial tem o tempo e o espaço como variáveis independentes [21, 22].

## 4.1 Sistemas de 2ª Ordem

Um sistema dinâmico de segunda ordem, no caso contínuo, é aquele que é representado por uma equação diferencial de segunda ordem. A importância de se estudar este tipo de sistema vem do fato de que muitos sistemas físicos podem ser modelados de forma precisa como sistemas de segunda ordem.

### 4.1.1 Análise pelo Plano de Fase

Podemos obter uma visão global do comportamento de um sistema não-linear de segunda ordem através da plotagem de várias trajetórias diferentes do sistema no plano das suas variáveis de estado, chamado plano de estado ou plano de fase. A partir deste plano de fase, pode-se analisar a resposta do sistema para vários conjuntos diferentes de condições iniciais.

Se tornarmos  $x$  e  $\dot{x}$  de um sistema de segunda ordem descrito por:

$$x + f(x, \dot{x}) = 0 \quad (4.1)$$

como as coordenadas de um plano, cada estado do sistema irá corresponder a um ponto neste plano. De forma que, quando o tempo varia, este ponto descreverá uma curva no plano de fase. Essa curva é denominada de trajetória e essa representação geométrica do comportamento do sistema em termos dessas trajetórias é chamada representação de plano de fase. É, portanto, um método de se obter graficamente a solução das seguintes equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) = 0. \end{aligned}$$

#### Sistema Linear

É representado pelas equações de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1x_1(t) + b_1x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_2x_1(t) + b_2x_2(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

que, juntamente com as condições iniciais, definem o comportamento do sistema. Para obter-se facilmente a solução desse sistema, transforma-se esta representação numa equação diferencial de segunda ordem:

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0 \quad (4.3)$$

e obtêm-se as soluções da equação característica correspondente:

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (4.4)$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad (4.5)$$

de forma que a solução do sistema será dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} & , \text{ para } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ x(t) &= k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 t e^{\lambda_1 t} & , \text{ para } \lambda_1 = \lambda_2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde os valores de  $k_1$  e  $k_2$  são obtidos através das condições iniciais.

Dessa forma, a natureza da solução da equação (4.3) fica determinada de acordo com os valores que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  possam assumir. A localização destes no plano complexo determina as características do ponto singular:

- $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são complexos conjugados e estão no semiplano:
  - esquerdo  $\Rightarrow$  foco estável: as soluções convergem para a origem, de uma forma oscilatória. A origem é um ponto de equilíbrio estável, designada por foco estável.
  - direito  $\Rightarrow$  foco instável: as soluções divergem da origem de uma forma oscilatória. A origem é um ponto de equilíbrio instável, chamado foco instável.

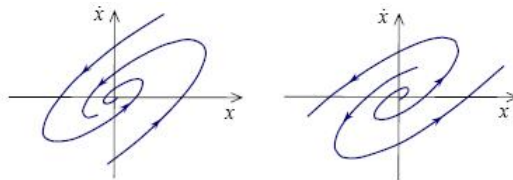


Figura 4.1: Foco estável (à esquerda) e foco instável (à direita).

- $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais e estão no semiplano:
  - esquerdo  $\Rightarrow$  nó estável: as soluções convergem para a origem, que é um ponto de equilíbrio estável.
  - direito  $\Rightarrow$  nó instável: as soluções divergem da origem, que é um ponto de equilíbrio instável.
- $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são complexos conjugados sob o eixo  $jw$ 
  - $\Rightarrow$  centro: as soluções são oscilatórias, sem amortecimento ou expansão.

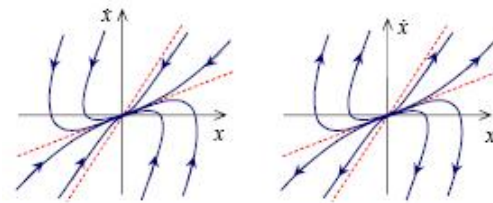


Figura 4.2: Nó estável (à esquerda) e nó instável (à direita).

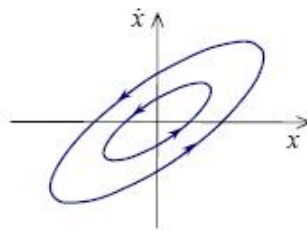


Figura 4.3: Centro.

- $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais, sendo que  $\lambda_1$  está no semiplano esquerdo enquanto  $\lambda_2$  está no semiplano direito.  
 $\Rightarrow$  Ponto de sela: algumas soluções começam se aproximando da origem mas acabam se afastando. Há trajetórias particulares que entram no ponto de sela e separam o plano de fase em regiões de movimentos distintos (separatriz).

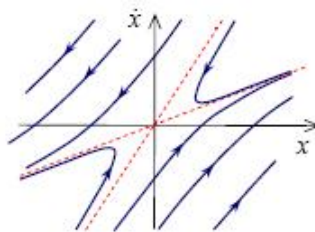


Figura 4.4: Ponto de sela.

### Sistema Não-linear

Neste tipo de sistema, devido à sua complexidade, não se espera obter as trajetórias do plano de fase analiticamente. Dessa forma, o que tenta-se fazer é determinar o



comportamento qualitativo das soluções. Uma variedade enorme de plano de estados é possível.

A idéia é aproximar-se, então, o plano de fase próximo de cada ponto de equilíbrio pelo plano de fase do sistema linear correspondente.

Essa linearização é segura apenas para os pontos de equilíbrio do sistema linearizado que não estão num caso de borda. Em outras palavras, se o sistema linear prevê um ponto de sela, um nó ou um foco, então no sistema não-linear de origem, o ponto de equilíbrio realmente será um ponto de sela, um nó ou um foco como previsto. No entanto, os casos de borda, como centros, nós degenerados, estrelas ou pontos fixos não isolados são bem mais delicados [21, 22].

### 4.1.2 Ciclos Limite

Um ciclo limite é uma trajetória fechada isolada, isto é, não existe nenhuma outra trajetória fechada numa vizinhança suficientemente pequena. Eles representam oscilações que podem ser estabelecidas, com amplitude, frequência e forma bem definidas, sem que o sistema esteja sujeito a qualquer solicitação externa [21, 22].

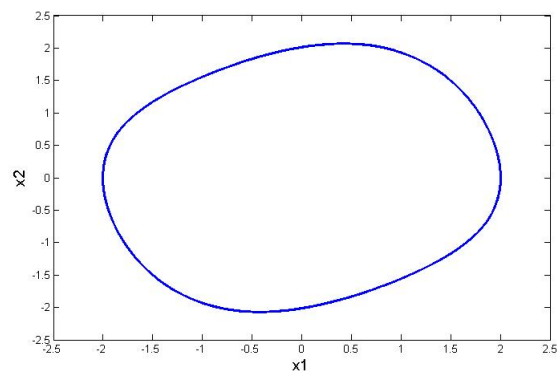


Figura 4.5: Ciclo limite.

Deve-se ressaltar que nem todas as curvas fechadas no plano de fase são ciclos limite. Ciclos limite são fenômenos inerentemente não lineares e não podem acontecer em sistemas lineares.

Um sistema linear  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  pode ter trajetórias fechadas, mas elas não estarão isoladas. Se  $\mathbf{x}(t)$  é uma solução periódica, então  $c\mathbf{x}(t)$  também será para qualquer

constante  $c \neq 0$ . Então, a solução  $\mathbf{x}(t)$  é “envolvida” por uma família de trajetórias fechadas. Conseqüentemente, a amplitude de uma oscilação linear depende das suas condições iniciais e qualquer perturbação da amplitude persistirá para sempre, enquanto que um ciclo limite representa uma oscilação que é determinada pela estrutura do próprio sistema.

De acordo com o comportamento das trajetórias que se iniciam próximo ao ciclo limite, os ciclos limite são classificados em estáveis, instáveis ou semi-estáveis.

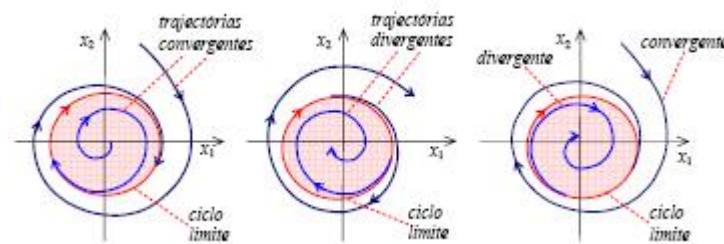


Figura 4.6: Estabilidade de ciclos limite.

Um ciclo limite é estável quando as trajetórias que se iniciam dentro da região de atração do ciclo convergem para ele. Neste caso, o sistema apresenta uma oscilação mantida com amplitude constante. Ciclos limite estáveis são importantes, cientificamente falando, por modelar diversos sistemas que apresentam oscilações auto-excitadas como o batimento do coração, por exemplo [21, 22].

O ciclo limite é classificado como instável quando qualquer trajetória que se inicia na sua vizinhança diverge dele. Apenas as trajetórias que nele se iniciam, permanecem nele; e, mesmo estas, tendem a “descolar” do ciclo limite e se afastar dele devido a algum ruído ou pequenas perturbações.

Um ciclo limite pode também ser classificado como semi-estável no caso onde as trajetórias que se iniciam na sua vizinhança em pontos fora do ciclo limite, divergem deste, enquanto que trajetórias que se originam em pontos dentro do ciclo limite convergem a este, ou vice-versa. Devido à existência de ruído ou de pequenas perturbações, cedo ou tarde, uma trajetória que inicia-se dentro (fora) do ciclo limite acaba “atravessando” o ciclo para seu exterior (interior) e afastando-se dele [21, 22].

## 4.2 Oscilador de van der Pol

Um dos primeiros exemplos de sistemas físicos que exibem ciclos limites foi descoberto por van der Pol. O sistema físico foi modelado por

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (4.7)$$

onde  $\mu \geq 0$  é um parâmetro. Historicamente, essa equação apareceu em conexão com os estudos de circuitos elétricos não-lineares usados nos primeiros rádios [21].

A seguir, é apresentado o raciocínio desenvolvido por van der Pol e Van der Mark para obter tal equação extraído de [23].

Os movimentos oscilatórios mais comumente encontrados são de forma senoidal. Tem-se exemplos simples como o movimento de um pêndulo, um sistema mecânico, e também sistemas eletrônicos, como o circuito RLC.

A equação diferencial que descreve as pequenas oscilações de um pêndulo livre é exatamente a mesma que descreve as variações de corrente ou da diferença de potencial em um circuito RLC série,

$$L \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + r \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{1}{C}\vartheta = 0$$

ou

$$\ddot{\vartheta} + \alpha\dot{\vartheta} + w^2\vartheta = 0, \quad (4.8)$$

onde  $\alpha = \frac{r}{L}$ ,  $w^2 = \frac{1}{CL}$ .

Quando a resistência do circuito é muito pequena,  $\alpha^2 \ll w^2$ , a descarga do capacitor é amortecida e sua frequência angular é dada por:

$$w^2 = \frac{1}{CL}, \quad (4.9)$$

de forma que a frequência destas oscilações é determinada pelo inverso do produto de uma indutância por uma capacitância. No caso do pêndulo:

$$w^2 = \frac{ml^2}{mgl} = \frac{l}{g}$$

onde  $m$  = massa do pêndulo

$l$  = comprimento do pêndulo

$g$  = aceleração da gravidade.

Essas oscilações são amortecidas. Elas decrescem gradualmente com o tempo devido à dissipação de energia: no caso elétrico pela resistência ôhmica, e no caso mecânico pelo atrito no suporte do pêndulo.

No entanto, em sistemas que possuem uma fonte de energia, podem aparecer resistências de caráter negativo. Em vez de dissipar energia, essas resistências fornecem energia ao sistema. Dessa forma, as oscilações tendem a aumentar indefinidamente em amplitude quando uma resistência negativa é inserida no sistema ao invés de diminuir como no caso de uma resistência positiva.

A equação diferencial para tal sistema com resistência negativa é igual à (4.8) apenas modificando o sinal da resistência:

$$\ddot{\vartheta} - \alpha\dot{\vartheta} + w^2\vartheta = 0 \quad (4.10)$$

No entanto, esse aumento da amplitude não pode continuar indefinidamente. No sistema, sempre haverá uma causa qualquer que tornará a resistência positiva novamente quando a amplitude passar de um certo valor. Então, a resistência  $r$  e a expressão  $\alpha$  do sistema devem depender da amplitude de forma a mudar o sinal quando a amplitude for superior a um certo valor constante determinado pela natureza do sistema.

Para isso, basta substituir  $\alpha$  por  $\alpha(1 - \vartheta^2)$  e a expressão seguinte mudará de sinal quando  $\vartheta^2$  for superior à unidade, valor escolhido arbitrariamente e dependente, apenas, das unidades empregadas. Assim chega-se a

$$\ddot{\vartheta} - \alpha(1 - \vartheta^2)\dot{\vartheta} + w^2\vartheta = 0 \quad (4.11)$$

Para o caso onde  $\alpha \ll w^2$ , as oscilações senoidais são estabelecidas com  $T_{\text{sen}} = 2\pi\sqrt{CL}$ . Já no caso onde  $\alpha \gg w^2$ , aparecem oscilações, chamadas oscilações de relaxação, cujo período é determinado por uma forma qualquer de "tempo de relaxação", no lugar do produto de uma elasticidade e uma massa. No caso elétrico, o período dessas oscilações de relaxação é determinado pelo tempo de descarga do capacitor  $T_{\text{rel}} = \frac{\alpha}{w^2} = Cr$ . A frequência destes fenômenos periódicos não é necessariamente constante e variam basicamente porque o "tempo de relaxação" é determinado por

uma resistência de um tipo qualquer que sofre muito mais variações por circunstâncias externas do que uma massa ou uma elasticidade.

Então, resumindo, a equação (4.11) parece com a de um oscilador harmônico simples, mas com um termo não-linear  $\alpha(1 - \vartheta^2)\dot{\vartheta}$ . Este termo causa o decaimento de grandes amplitudes e promove novamente o crescimento quando estas se tornam muito pequenas. Desta forma, o sistema estabelece uma oscilação auto-sustentável onde a energia dissipada por um ciclo é balanceada pela energia gerada [21].

Através de uma análise sofisticada, pode-se mostrar que a equação de Van der Pol tem um único ciclo limite estável para cada  $\alpha > 0$  [21].

Para a equação de van der Pol dada abaixo:

$$\ddot{x} + \alpha(1 - x^2)\dot{x} + x = 0,$$

quando  $\alpha$  é pequeno ( $\alpha < 1$ ), o oscilador de van der Pol exibe oscilações quase senoidais, com conseqüente ciclo limite circular. Já para  $\alpha > 1$ , as soluções apresentam

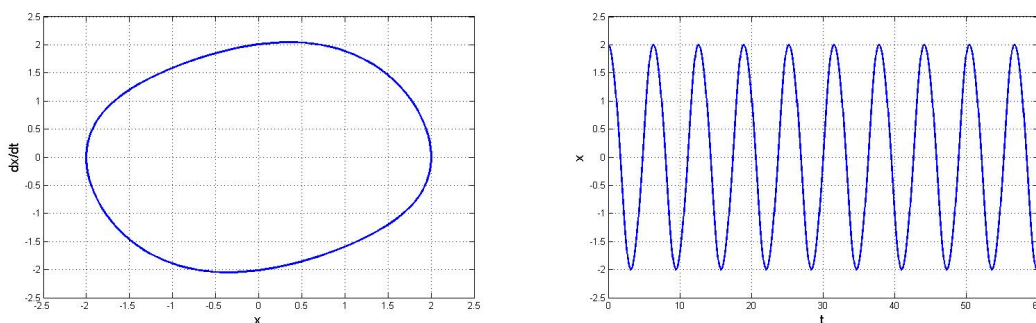


Figura 4.7: Resposta do oscilador de van der Pol para  $\alpha = 0.2$ .

o ciclo limite mostrado na figura 4.8

## 4.3 Estudo de Efeitos Não-lineares

### 4.3.1 Análise por Funções Descritivas

A função descritiva nos permite justificar alguns fenômenos típicos de sistemas não-lineares e que não são explicados pelos modelos lineares.

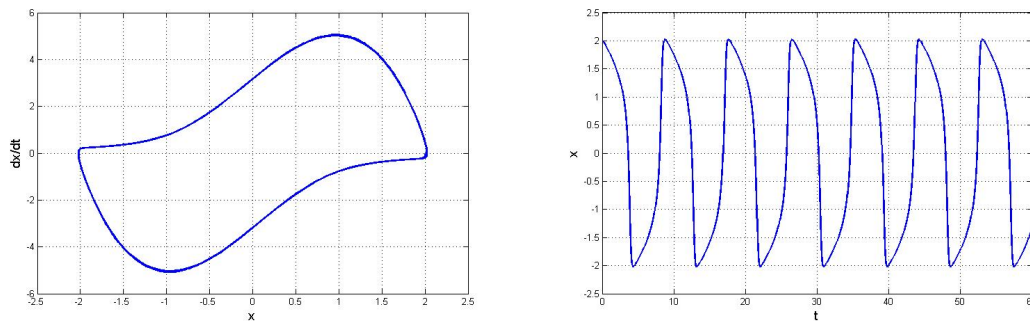


Figura 4.8: Resposta do oscilador de van der Pol para  $\alpha = 3$ .

A idéia básica da técnica de análise considerada aqui é que uma entrada senoidal em um elemento não-linear produzirá uma saída com componentes da mesma frequência do sinal de entrada bem como suas harmônicas. Essa análise por funções descritivas assume que apenas a componente fundamental da saída é importante. A função descritiva relaciona a amplitude e a fase da fundamental (primeira harmônica) da saída do elemento não-linear à amplitude e fase da entrada senoidal; o que pode ser considerado como uma tentativa de generalização do conceito de função de transferência para sistemas não-lineares [24].

Considere um sistema com apenas uma não linearidade e o caso em que a entrada  $e(t)$  do elemento não-linear é senoidal,

$$e(t) = E \text{ sen } \omega t$$

No regime permanente,  $n(t)$  é periódica e, em geral, não-senoidal.

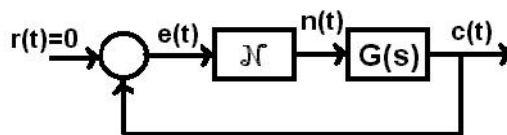


Figura 4.9: Sistema não-linear sem entrada.

Representando  $n(t)$  por uma série de Fourier:

$$n(t) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega t} \quad (4.12)$$

onde os coeficientes da série de Fourier são dados por:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} n(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (4.13)$$

onde  $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

Supondo uma não-linearidade simétrica,  $A_0$  é zero, e que  $G(S)$  é passa-baixas com relação aos harmônicos em  $n(t)$ , então  $c(t)$  pode ser expressa por:

$$c(t) = C \text{sen}(wt + \theta).$$

Os harmônicos em  $n(t)$  não são importantes uma vez que estes harmônicos têm muito pouco efeito sobre  $c(t)$ . Dessa forma, os harmônicos podem ser ignorados, e  $n(t)$  aproximado por:

$$n(t) \approx N_1 \text{sen}(wt + \phi)$$

Observa-se que  $n(t)$  pode ser aproximado por uma senoide com mesma frequência de  $e(t)$  porém com amplitude e fase diferentes. Dessa forma, a função:

$$N(E, w) = \frac{N_1}{E} e^{j\phi}$$

pode ser considerada como a função de transferência do componente não-linear,  $N$ , do sistema [24].

### 4.3.2 Sincronização

Alguns sistemas apresentam o seguinte comportamento: excitando-se o sistema com uma senoide, somente quando a amplitude da mesma atingir um determinado valor é que a saída “acompanha” a entrada, isto é, a saída é periódica com a mesma frequência do sinal de entrada. O fenômeno da sincronização consiste no fato em que uma oscilação forçada de frequência  $W_f$  dada, é possível somente quando a amplitude da entrada  $r$  é superior a um certo valor, chamado de amplitude crítica ou de corte [24].

As oscilações dos sistemas não-lineares tendem a ocorrer com amplitude e frequência que são próprias do sistema e não dependem da entrada do sistema; e podem até mesmo ocorrer na ausência de uma entrada, são as oscilações do sistema autônomo, ou as oscilações livres do sistema. Quando o sistema é submetido a uma entrada periódica

$$r(t) = R \text{sen } W_f t \quad (4.14)$$

pode-se estabelecer um regime oscilatório permanente à frequência da entrada, são as oscilações forçadas do sistema [24].

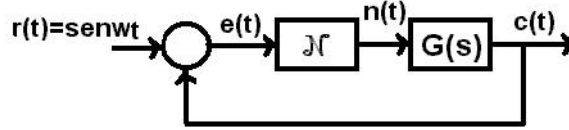


Figura 4.10: Sistema não-linear com entrada forçada.

Utilizando o método do primeiro harmônico,

$$e(t) = E \operatorname{sen}(W_f t + \varphi) \quad (4.15)$$

$$e = r - c \quad (4.16)$$

$$c = e N(E) G(s) \quad (4.17)$$

Substituindo (4.17) em (4.16),

$$\begin{aligned} e &= N(E) G(s) e(t) = r \\ e(1 + N(E) G(s)) &= r \\ \frac{e}{r}(jw) &= \frac{1}{1 + N(E) G(jw)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

de forma que:

$$\begin{aligned} \frac{E}{R} &= \left| \frac{1}{1 + N(E) G(jw_f)} \right| \\ \varphi &= \operatorname{arg} \left( \frac{1}{1 + N(E) G(jw_f)} \right) \end{aligned}$$

Esta equação é mais facilmente resolvida graficamente, construindo no plano  $(R, E)$  a curva:

$$R = E |1 + N(E) G(jw_f)| \quad (4.19)$$

Para construir esta curva, obtém-se o gráfico da expressão  $\left| \frac{1}{N(E)} + G(jw_f) \right|$  que representa a distância da curva,  $L(jw_f)$  no ponto fixo  $w = w_f$  ao valor  $-\frac{1}{N(E)}$  no ponto corrente  $E$  (Figura 4.11); e  $R$  é obtido multiplicando esta distância, função de  $E$ , pela quantidade  $E N(E)$ .



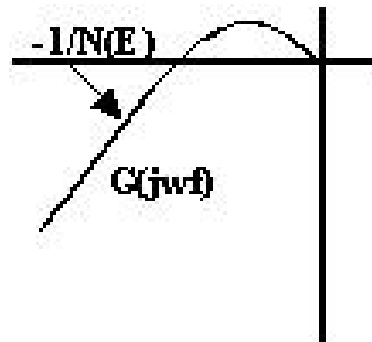


Figura 4.11: Gráfico 1

Quando a relação entre  $R$  e  $E$  tem a forma indicada na figura 4.12, não existe oscilação forçada possível para  $R < R_c$ , existem duas oscilações forçadas possíveis para  $R_c < R < R'_c$ , o círculo de centro  $P_f$  e raio  $R$  corta o eixo real em dois pontos, e uma quando  $R > R'_c$ .

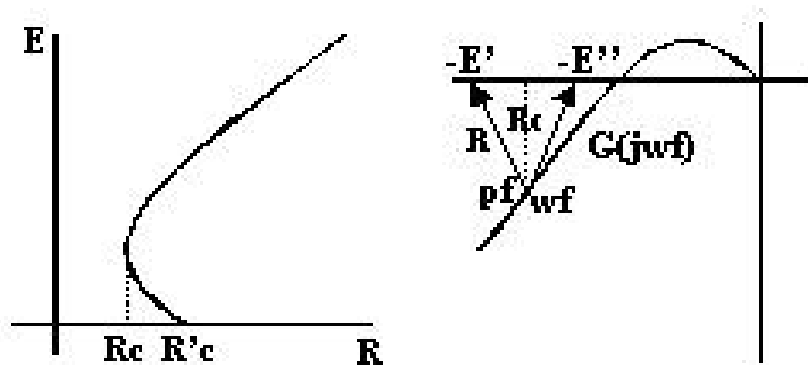


Figura 4.12: Gráfico 2

Para cada valor de  $w_f$  existe uma amplitude de corte,  $R_c$ , correspondente que fica cada vez menor cada vez que  $w_f$  se aproxima da frequência das oscilações livres,  $w_0$ . No limite, quando  $w_f = w_0$ , a amplitude de corte é nula e observa-se a oscilação livre que ocorre sem a necessidade de um sinal de sincronização [24].

### 4.3.3 Encarrilhamento de Frequência

O estudo das oscilações forçadas nos sistemas não-lineares é um problema bastante complexo. Nem sempre haverá uma oscilação forçada de pulsação  $w_f$ . Para encarrilhar o sistema à pulsação  $w_f$ , a entrada deve, em geral, ter uma amplitude superior à amplitude de corte da sincronização. Considerando uma entrada senoidal de frequência  $w_f$ :

$$f(t) = F \cos w_f t,$$

num sistema oscilante que possui uma frequência de oscilação livre  $w_0$ , ocorrem as seguintes situações [24].

Para pequenos valores de amplitude de entrada  $F$  o sistema oscilará na sua oscilação natural  $w_0$ , e para grandes valores de  $F$  ocorrerá uma oscilação forçada  $w_f$  com harmônicas e subharmônicas. Para valores intermediários de  $F$ , pode-se observar um comportamento complexo, oscilação combinada ou batimentos, onde o sistema fica hesitando entre as oscilações  $w_0$  e  $w_f$ . A presença do sinal de entrada  $w_f$  pode ainda ter como efeito uma mudança da frequência de oscilação  $w_0$  própria do sistema que é denominada por encarrilhamento de frequência [24].

Seja um oscilador de van der Pol com oscilação livre  $w_0$  e amplitude  $\frac{2}{\sqrt{\beta}}$  forçado por um sinal de entrada de amplitude  $f$  e frequência  $w_f$ . Então

$$\frac{d^2V}{dt^2} - \alpha(1 - \beta V^2)w_0 \frac{dV}{dt} + w_0^2 V = f \operatorname{sen} w_f t. \quad (4.20)$$

Pelo método de Andronov e Vitt [21], procura-se a solução forçada da forma

$$V(t) = V_1 \operatorname{sen} w_f t + V_1' \cos w_f t, \quad (4.21)$$

onde  $V_1(t)$  e  $V_1'(t)$  são funções com variações lentas, ou seja, com derivadas infinitamente pequenas com  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $f$  e se estuda as soluções  $V_1(t)$  e  $V_1'(t)$  pelo método topológico de Poincaré [24] no plano  $(V_1, V_1')$ .

Sendo  $w'$  a frequência de  $V_1$  e  $V_1'$ , o fenômeno dos batimentos aparece com as frequências  $w_f \pm w'$ . Estas oscilações combinadas correspondem, na representação de Andronov e Vitt, à existência de um ciclo limite no plano  $(V_1, V_1')$ .

Se a diferença entre a frequência de sincronismo e a frequência de oscilação é grande, sempre existe um regime de oscilação combinada e ela é única. Do contrário, se a diferença for pequena não há oscilação combinada. Desta forma, por menor

que seja a amplitude da entrada  $F$ , sendo  $w_f$  vizinha de  $w_0$ , o sistema oscila unicamente com a frequência  $w_f$ , ou seja, as oscilações livres encontram-se encarrilhadas à frequência da entrada  $w_f$ . Este é o fenômeno denominado de encarrilhamento de frequência. Então, quando  $w_f$  é vizinha de  $w_0$ , não existe mais amplitude de corte, a entrada  $w_f$  encarrilha o sistema à sua frequência independente de quão pequena seja a sua amplitude [24].

O encarrilhamento de frequência ocorre também quando  $w_f$  é vizinha de um múltiplo inteiro (ou submúltiplo) de  $w_0$ ,  $w_f \simeq n w_0$ . Neste caso, a entrada faz o sistema oscilar com frequência  $\frac{w_f}{n}$ , fenômeno conhecido como desmultiplicação da frequência.

Para ilustrar o fenômeno, considera-se um oscilador de van der Pol com uma entrada senoidal forçada:

$$\ddot{x} + \alpha(1 - x^2)\dot{x} + x = a \text{ sen } wt.$$

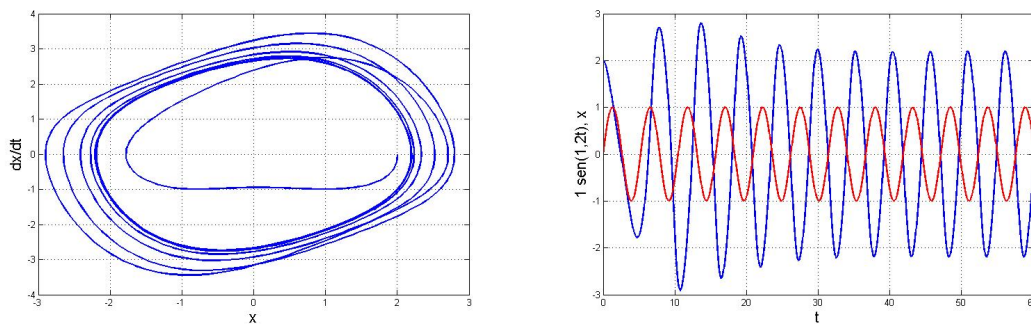


Figura 4.13: Resposta do oscilador de van der Pol com entrada forçada  $\text{sen } 1, 2t$  para  $\alpha = 0, 25$ .

Através da figura 4.13 percebe-se que o oscilador de van der Pol passa a oscilar com a frequência do sinal de entrada.

## 4.4 Osciladores Acoplados

O estudo de osciladores acoplados, iniciado no século XVII por Huygens, envolve hoje uma variedade de campos de pesquisa, como matemática, biologia, neurociência, robótica, eletrônica e economia, por exemplo [25]. Os elementos essenciais do estudo

dos sistemas de osciladores não-lineares acoplados são as oscilações auto-sustentáveis ou forçadas e um acoplamento suficientemente forte entre eles, permitindo comportamentos temporais complexos que capturam algumas das características de fenômenos naturais irregulares [26].

Um dos fenômenos comuns observados entre osciladores é a sincronização que é o processo onde dois ou mais sistemas interagem entre si e se movem juntos [27]. A primeira discussão conhecida sobre sincronização é atribuída a Christian Huygens em 1657, quando ele construiu o primeiro relógio de pêndulo. A observação da sincronização foi feita por Huygens quando o mesmo estava doente e passou dias na cama assistindo ao movimento de dois dos seus relógios na parede. Ele descreveu perfeitamente o fenômeno e deu uma explicação qualitativa brilhante para o efeito da sincronização mútua; ele entendeu que a conformidade dos ritmos dos dois relógios fora causado por um movimento imperceptível da base que os unia, ou seja, os relógios sincronizaram em antifase devido ao acoplamento através da base.

Mesmo tentando perturbar o movimento de um dos pêndulos, este eventualmente voltava a oscilar em anti-fase, com a mesma frequência do outro [29, 27, 28].

#### 4.4.1 Metrônomos como Osciladores Acoplados

Um excelente exemplo do fenômeno da sincronização em dois osciladores acoplados é dado no experimento realizado em [27] que é uma variação do sistema original de Huygens. O experimento é composto por dois metrônomos de pêndulo, uma plataforma leve de madeira apoiada sobre duas latas de refrigerante vazias.

Cada oscilador é colocado para oscilar em uma amplitude e uma frequência determinada, diferentes entre si. Um pêndulo deste pode ser modelado por um oscilador de van der Pol. Ou seja, mesmo perturbando o mesmo, este volta a oscilar com amplitude e frequência anteriores, determinadas pelo ciclo limite. Coloca-se, então, os dois metrônomos sobre a plataforma e observa-se que para diferenças pequenas de frequência, os metrônomos sincronizam para todas condições iniciais onde as amplitudes iniciais são grande o suficiente para combater o mecanismo de escapamento. A sincronização acontece em cerca de algumas dezenas de segundos. Além da visualização do movimento mecânico do pêndulo do metrônomo, a sincronização pode ser

notada pelo som emitido pelos mesmos.

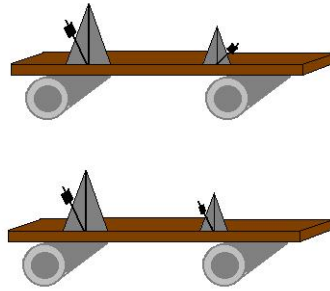


Figura 4.14: Metronomos entrando em sincronismo

Desta forma, o sistema é modelado por dois osciladores acoplados. O acoplamento, neste caso, se faz pelos impulsos que são transferidos através da plataforma.

#### 4.4.2 Acoplamentos entre Osciladores de van der Pol

Existem várias áreas de pesquisa que aplicam osciladores de van der Pol numa tentativa de modelar os fenômenos não-lineares. O interesse pela dinâmica de osciladores de van der Pol vem desde 1920, quando van der Pol usou três deles para modelar o batimento do coração [30, 23].

Diferentes formas de acoplamento são possíveis entre os osciladores, dependendo da sua aplicação.

Mais recentemente, a dinâmica de dois osciladores acoplados tem sido bastante estudada para modelar fenômenos biológicos [[3, 2, 30, 31].

No modelo para o coração realizado em [31], consistindo de dois osciladores de van der Pol, o acoplamento entre os mesmos foi feito de forma unidirecional, bidirecional e ainda colocou-se um sinal de entrada fazendo o papel de um marcapasso. Como visto no Capítulo 2 desta dissertação, no funcionamento normal, o impulso cardíaco é gerado no nódulo SA, o oscilador principal, e é transmitido para o nódulo AV que oscila na frequência imposta pelo nódulo SA, caracterizando o fenômeno do encarrilhamento de frequência entre os osciladores não-lineares. Desta forma, como primeira aproximação, a autora de [31] considerou um acoplamento unidirecional na direção do nódulo SA para o AV; e, num próximo modelo, considerou um acoplamento bidirecional, porém assimétrico. Considerou também um marcapasso externo acoplado ao

nódulo SA, no modelo representado por uma entrada periódica no oscilador referente ao nóduo SA.

Os osciladores de ambos os nódulos, SA e AV, foram descritos por duas equações de van der Pol acopladas.

Para o nóduo SA:

$$\ddot{x}_1 = k(x_1 - w_1)(x_1 - w_2)\dot{x}_1 - b_1x_1 + a_1 \text{sen}(f_1t) + C_1(x_3 - x_1),$$

e para o nóduo AV:

$$\ddot{x}_3 = k(x_3 - w_1)(x_3 - w_2)\dot{x}_3 - b_2x_3 + C_2(x_1 - x_3).$$

O termo  $a \text{sen}(f_1t)$  representa a entrada forçada, o marcapasso, acoplada ao nóduo SA. Neste artigo [31], considerou-se dois tipos de acoplamento: o primeiro, representando um acoplamento unidirecional, quando  $C_1 = 0$  e  $C_2 > 0$ ; e o segundo, um acoplamento bidirecional assimétrico,  $C_1 > 0$ ,  $C_2 > 0$  e  $C_1 \ll C_2$ .

Outro tipo de acoplamento foi utilizado em [30] para estudar os ritmos periódicos nos olhos dos vertebrados, devido a evidências experimentais de tais ocorrências. São movimentos periódicos, ciclos limites, com períodos de aproximadamente 24h, os níveis de melatonina variaram periodicamente desta maneira, durante o experimento. Fez-se, então, uma conjectura de que o sistema visual tem sua sensibilidade controlada por estes osciladores que antecipam as mudanças da luminosidade que ocorrem entre o crepúsculo e a aurora. Os autores modelaram cada ritmo periódico por um ciclo limite de um oscilador de van der Pol. Embora não exista uma conexão direta entre os dois olhos, eles podem se influenciar entre si alterando a concentração de melatonina no fluxo sanguíneo. Então, o modelo foi realizado considerando um acoplamento entre os olhos, onde  $x$  e  $y$  representam as concentrações de melatonina em cada olho, via uma “*bath*” representando a concentração de melatonina no fluxo sanguíneo,  $z$ . Assim, chega-se ao sistema

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x &= k(z - x) \\ \ddot{y} - \epsilon(1 - y^2)\dot{y} + y &= k(z - y) \\ \dot{z} &= k(x - z) + k(y - z) \end{aligned} \tag{4.22}$$

Várias aplicações de osciladores acoplados diretamente existem; por exemplo, na dinâmica de “*laser*”. O trabalho de Wirkus e Rands [32] foi motivado por aplicações

na dinâmica dos “*laser*” e nos osciladores de microondas, em geral. Eles explicam que quando dois osciladores de microondas operam fisicamente próximos, o sinal de saída de um afeta o comportamento do outro, o que acarreta imediatamente num efeito de atraso nos termos de acoplamento. Estudou-se, então, a dinâmica de dois osciladores de van der Pol fracamente acoplados, onde cada termo de acoplamento apresenta uma defasagem  $\tau$ . O acoplamento escolhido foi através dos termos de primeira derivada, porque esta forma de acoplamento ocorre em séries de osciladores de microondas radioativos acoplados [32]. Nesse caso,

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + x_1 - \varepsilon(1 - x_1^2)\dot{x}_1 &= \varepsilon\alpha\dot{x}_2(t - \tau), \\ \ddot{x}_2 + x_2 - \varepsilon(1 - x_2^2)\dot{x}_2 &= \varepsilon\alpha\dot{x}_1(t - \tau).\end{aligned}$$

Outras formas de acoplamento entre dois osciladores idênticos são consideradas em [25]:

Uma configuração unidirecional

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \alpha(x_1^2 - 1)\dot{x}_1 + w^2x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \alpha(x_2^2 - 1)\dot{x}_2 + w^2x_2 = \alpha k(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{cases} \quad (4.23)$$

Uma bidirecional

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \alpha(x_1^2 - 1)\dot{x}_1 + w^2x_1 = \alpha k_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ \ddot{x}_2 + \alpha(x_2^2 - 1)\dot{x}_2 + w^2x_2 = \alpha k_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{cases} \quad (4.24)$$

entre outras.

Ainda, em [4], é apresentada uma outra maneira de acoplamento:

$$\begin{cases} \ddot{x} = (\varepsilon_1 - (x + \beta z)^2)\dot{x} - (x + \beta z) \\ \ddot{z} = (\varepsilon_2 - (z + \alpha x)^2)\dot{z} - (z + \alpha x) \end{cases} \quad (4.25)$$

São dois osciladores de van der Pol, acoplados por uma adição, à amplitude de cada um, de uma perturbação proporcional ao outro. Para  $\alpha = \beta = 0$ , a equação (4.25) é desacoplada resultando em dois osciladores de van der Pol cujos Ciclos limite são determinados (em período fundamental e amplitude) por  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ .

Percebe-se, então, pelo exposto a riqueza e complexidade dos acoplamentos. Existe uma grande quantidade de maneiras diferentes para se fazer acoplamento entre osciladores. Estudos mais detalhados são realizados no sentido de investigar a dinâmica destes sistemas acoplados, como a existência de estabilidade, as propriedades

da sincronização com respeito à natureza e intensidade do acoplamento, entre outros fenômenos.

### 4.4.3 Existência de Ciclo limite para Equações de van der Pol Acopladas

A existência de um ciclo limite para uma equação de van der Pol é bem conhecida e a prova da existência do ciclo limite é baseada no teorema de Poincaré-Bendixson [33].

No entanto, para o caso de osciladores de van der Pol acoplados, a existência de ciclos limites ainda não está estabelecida, exceto para alguns casos específicos.

No artigo [33] prova-se a existência de ciclos limites para equação de van der Pol acopladas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \varepsilon_1(u_1^2 - a_1)\dot{u}_1 + c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + c_{13}u_3 + \dots + c_{1n}u_n = 0, \\ \ddot{u}_2 + \varepsilon_2(u_2^2 - a_2)\dot{u}_2 + c_{21}u_1 + c_{22}u_2 + c_{23}u_3 + \dots + c_{2n}u_n = 0, \\ \dots \\ \ddot{u}_n + \varepsilon_n(u_n^2 - a_n)\dot{u}_n + c_{n1}u_1 + c_{n2}u_2 + c_{n3}u_3 + \dots + c_{nn}u_n = 0. \end{cases} \quad (4.26)$$

para o caso onde  $n = 2$ :

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \varepsilon_1(u_1^2 - 1)\dot{u}_1 + u_1 + c_2u_2 = 0, \\ \ddot{u}_2 + \varepsilon_2(u_2^2 - 1)\dot{u}_2 + c_1u_1 + u_2 = 0. \end{cases}$$

### 4.4.4 Interações Cardiorespiratórias

Como já mencionado, osciladores biológicos são encontrados em vários níveis de complexidade em quase todos os organismos vivos. Num sistema vivo, por exemplo, a regulação de uma variável é realizada através de um balaço dinâmico entre ativação e desativação que é o princípio básico de um oscilador. Uma característica comum de sistemas oscilatórios biológicos é sua habilidade de sincronizar. Encarrilhamento de osciladores auto-excitados por sinais externos ou sincronização mútua entre alguns osciladores já é bem entendido e este conhecimento é bastante utilizado em estudos experimentais e nos modelos das interações entre diferentes (sub)sistemas fisiológicos [34, 35, 36].



Um dos sistemas fisiológicos mais interessantes e complexos é o sistema cardiovascular. Estudos recentes tem apontado na direção de entender as interações entre os dois sistemas oscilatórios envolvidos na regulação do fluxo sanguíneo, o sistema cardíaco e o respiratório. Dessa forma, os sistemas cardíaco e respiratório, cada um de uma forma oscilatória, são um excelente exemplo de osciladores biológicos acoplados [34, 35, 36].

Os sistemas cardíaco e respiratório são acoplados por alguns mecanismos. Devido a estas interações a frequência cardíaca aumenta durante a inspiração e diminui na expiração. Esta modulação da frequência cardíaca pela respiração é denominada *respiratory sinus arrhythmia* (RSA) e foi observada por Hales no século XVIII através de experimentos realizados em um cavalo. Estudos recentes de sincronização entre os sistemas em questão confirmaram que os dois sistemas sincronizam em alguns episódios de tempo durante o sono. Esta seria uma outra forma de interação entre os sistemas. Propô-se, então, que esta sincronização seria uma forma de economia funcional do organismo [34, 37].

# Capítulo 5

## Análise dos resultados

Neste capítulo, utiliza-se a ferramenta descrita no capítulo 3 desta dissertação, a Informação Mútua, para quantificar o acoplamento entre dois sistemas,  $X$  e  $Y$ . Supondo que  $x(t)$  e  $y(t)$  são as saídas correspondentes de cada sistema, se existir algum acoplamento, então haverá dependência estatística entre  $x(t)$  e  $y(t)$ , ou seja, o acoplamento irá resultar num conseqüente fluxo de informação entre os sistemas. A força desse acoplamento é medida através da quantidade de informação entre os dois sinais, a Informação Mútua. A ausência de acoplamento é considerada como ausência de fluxo de informação ( $IM = 0$ ). Nesse caso, nada podemos saber de  $x$  dado que conhecemos  $y$ , e vice-versa. Por outro lado, um acoplamento total resultaria numa relação determinística, neste caso  $x(t)$  seria uma função de  $y(t)$  para quase todos os instantes, ou vice-versa. No entanto, procuramos por dependências estatísticas entre esses dois extremos; a total independência (desacoplados) e a total dependência (determinismo) são considerados situações muito especiais. A IM quantifica a força da dependência estatística sendo, dessa forma, considerada como a medida de acoplamento. Essa aproximação de medida de acoplamento via IM é independente de qualquer idéia de modelagem, sendo apenas uma aproximação estatística para qual quase não precisamos de suposições iniciais. Entretanto, uma análise por IM permite um direcionamento para o modelo dos sistemas: se não existir fluxo de informação, cada sistema opera individualmente de forma que eles podem ser modelados separadamente sem precisar de acoplamento [17].

Na primeira seção, simulou-se dois osciladores de van der Pol acoplados de maneiras diferentes que fazem o papel dos sistemas  $X$  e  $Y$ . Na segunda parte, os sistemas

em questão,  $X$  e  $Y$ , serão o sistema respiratório e cardiovascular. Fez-se um estudo com dados de quatro pacientes, cordialmente cedidos pelo InCor - HCFMUSP (Instituto do Coração do Hospital das Clínicas da Faculdade de Medicina da Universidade de São Paulo). Os dados são referentes a sinais do sistema cardiovascular e a sinais do sistema respiratório; a informação mútua foi, então, utilizada para medir o possível acoplamento entre os dois sistemas de forma a, possivelmente, servir como indicador fisiológico.

## 5.1 Osciladores Acoplados

### 5.1.1 Acoplamento Unidirecional

Através da ferramenta *Simulink* do programa *MATLAB*, simulou-se o seguinte sistema de van der Pol com um único acoplamento  $c_1$ :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - \mu_1(1 - x_1^2)\dot{x}_1 + x_1 = 0 \\ \ddot{x}_3 - \mu_2(1 - x_3^2)\dot{x}_3 + x_3 + c_1x_1 = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

onde  $\mu_1 = 2$  e  $\mu_2 = 0,5$ .

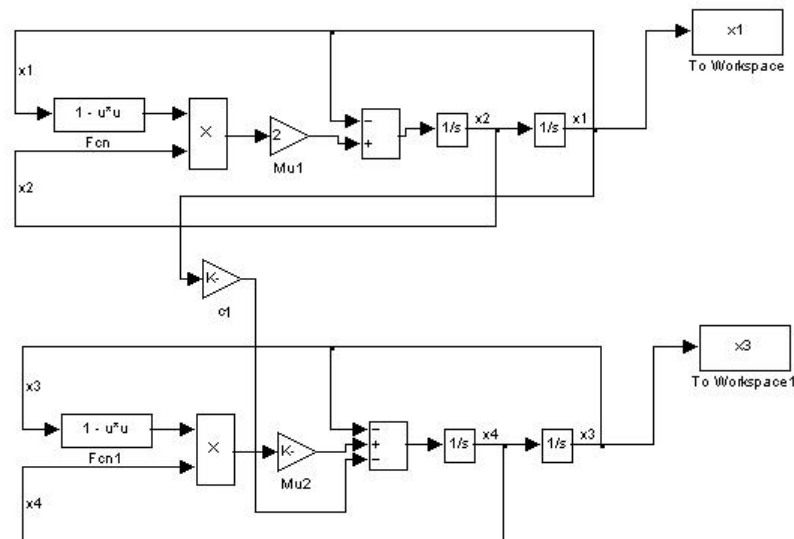


Figura 5.1: Osciladores de van der Pol com acoplamento unidirecional.

Para um valor de acoplamento de  $c_1 = 0,5$ , obtivemos os seguintes resultados mostrados na figura 5.2.

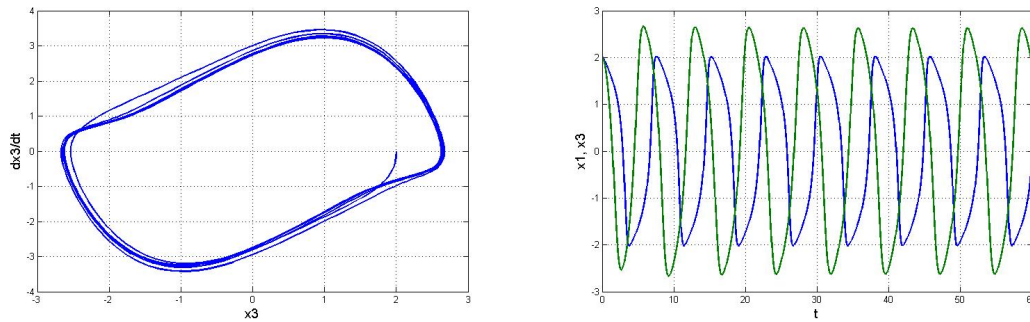


Figura 5.2: Resposta dos osciladores acoplados para  $c_1 = 0,5$ .

Utilizou-se a ferramenta IM para quantificar o acoplamento entre os dois sistemas não-lineares. Para tal, utilizamos o programa *Mutual Information Analyzer V1.8*, disponível no site <http://ap01.physik.uni-greifswald.de/pompe>.

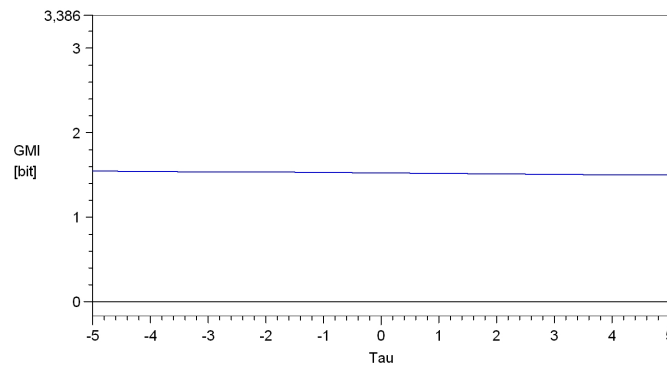


Figura 5.3: Informação Mútua Generalizada para diferentes defasagens para  $c_1 = 0,5$ .

Obtém-se como saída deste programa, as Informações Mútuas referentes às saídas do sistema sem defasagem entre elas,  $\tau = 0$ , e às saídas do sistema com defasagem em ambos os sentidos,  $\tau \neq 0$ . Também é fornecida a cota superior limite para a Informação Mútua, ou seja, a máxima Informação que poderá ser alcançada pelos dados. Neste caso, percebe-se que independente da defasagem obteve-se uma IM diferente de zero, o que indica um acoplamento entre os sistemas.

Considere-se agora um acoplamento mais forte decorrente de um aumento da constante de acoplamento  $c_1$ . Os resultados da simulação no *MATLAB* para o mesmo sistema acoplado, agora com  $c_1 = 4$  são apresentados na figura 5.4.

Obteve-se como IM do sistema para  $c_1 = 4$  o resultado apresentado na figura 5.5.

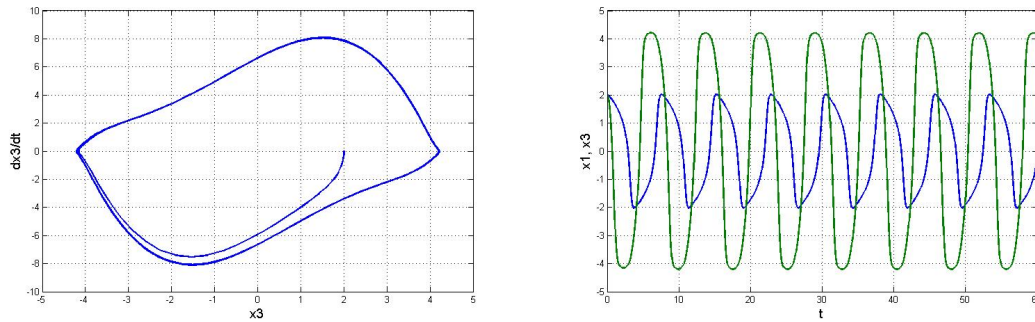


Figura 5.4: Resposta dos osciladores acoplados para  $c_1 = 4$ .

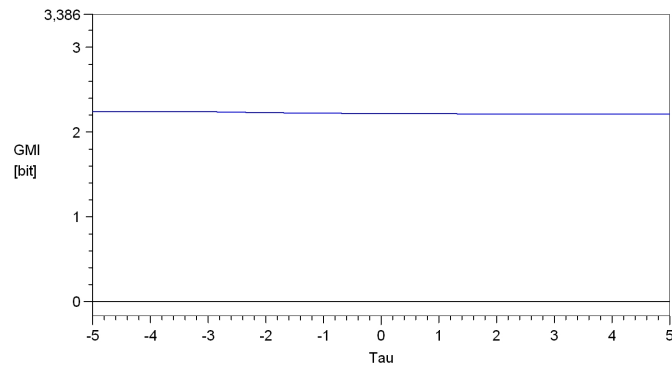


Figura 5.5: Informação Mútua Generalizada para diferentes defasagens para  $c_1 = 4$ .

Percebe-se que a IMG aponta um acoplamento mais forte entre os sistemas com este último coeficiente de acoplamento,  $c_1 = 4$ , com relação ao acoplamento anterior,  $c_1 = 0,5$ ; o que é intuitivamente esperado, já que, aumentou-se o valor do coeficiente de acoplamento.

### 5.1.2 Acoplamento Bidirecional

Simulou-se, também, os dois osciladores de van der Pol acoplados de uma maneira bidirecional, como mostrado pela equação 5.2 e pela figura 5.6.

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - \mu_1(1 - x_1^2)\dot{x}_1 + x_1 + c_2x_3 = 0, \\ \ddot{x}_3 - \mu_2(1 - x_3^2)\dot{x}_3 + x_3 + c_1x_1 = 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

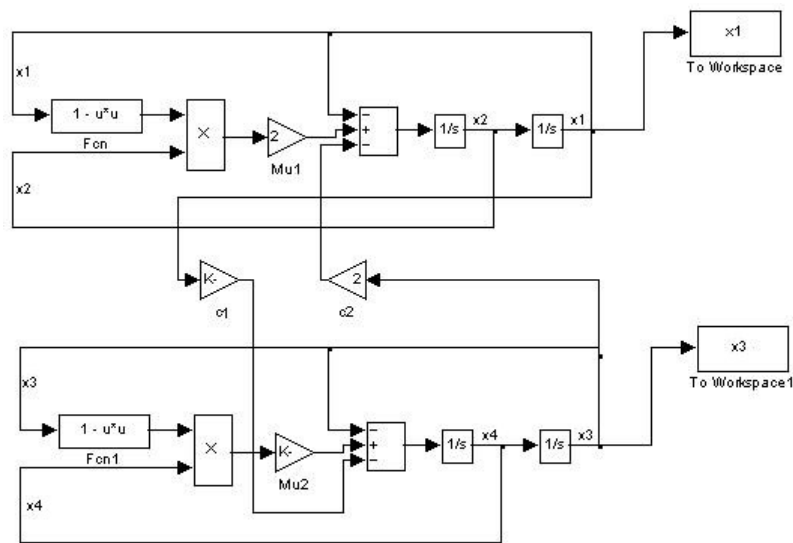


Figura 5.6: Osciladores de van der Pol com acoplamento bidirecional.

ainda para  $\mu_1 = 2$  e  $\mu_2 = 0,5$ .

Primeiro fez-se um acoplamento mais fraco considerando como coeficientes de acoplamento:  $c_1 = 0,25$  e  $c_2 = 1,5$ . A resposta do sistema para tal acoplamento é mostrada na figura 5.7.

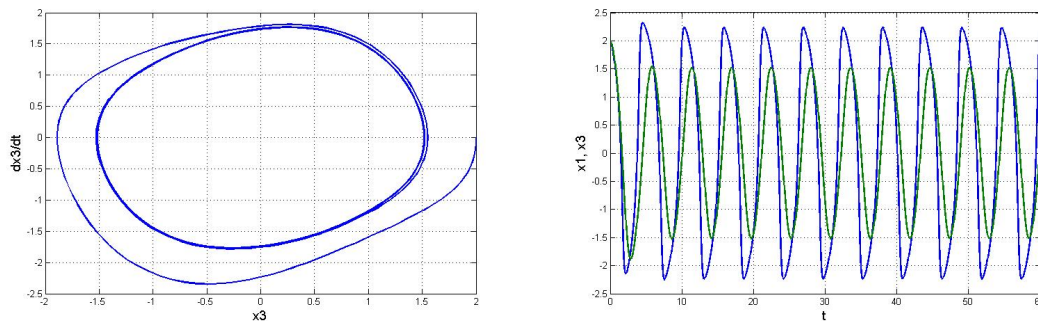


Figura 5.7: Resposta dos osciladores acoplados para  $c_1 = 0,25$  e  $c_2 = 1,5$ .

Como IMG para o sistema em questão, obtivemos o resultado exposto pela figura 5.8.

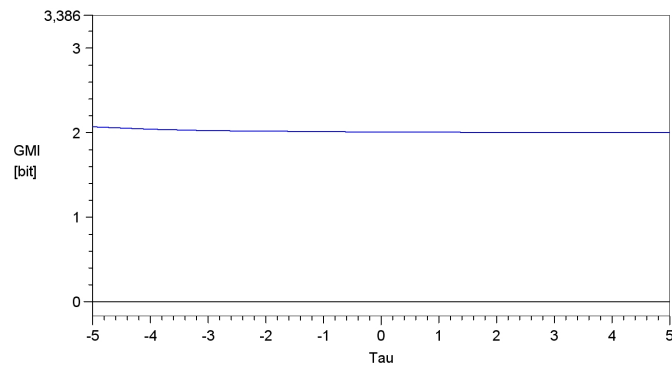


Figura 5.8: Informação Mútua Generalizada para diferentes defasagens para  $c_1 = 0, 25$  e  $c_2 = 1, 5$ .

## 5.2 IM no Sistema Cardiorespiratório

Tentou-se, nesta seção, medir o acoplamento entre os sistemas respiratório e cardiovascular de quatro pacientes durante o sono. O sono foi dividido em várias fases: vigília, S2, S3-4, REM. Considerou-se os sinais referentes à respiração e ao eletrocardiograma (ECG) de quatro pacientes adultos, saudáveis (não apresentando hipertensão). A medida da IM foi realizada entre o valor da frequência cardíaca e o valor da amplitude da respiração no instante correspondente. Para tal, foi desenvolvido um programa no *MATLAB* para detectar os picos *R* do ECG, calculando a frequência cardíaca e amostrar o valor da amplitude da respiração correspondente. Dados referentes à respiração e o ECG de um paciente foram coletados simultaneamente, foram lidos pelo programa elaborado e apresentaram-se como mostrado na figura 5.9; através de um detector de picos RR desenvolvido no programa citado, foi possível calcular a frequência cardíaca e, ao mesmo tempo, amostrar a amplitude correspondente da respiração.

A idéia aqui é captar a interação entre o sistema respiratório e o cardiovascular sob a ótica da IM. O pico da IM pode ser visto como a capacidade de canal entre o sistema cardiovascular e o respiratório. Imagina-se que, em casos patológicos, a capacidade de canal pode ser alterada indicando o estado de saúde do indivíduo. Pode-se pensar que, por exemplo, uma “boa capacidade de canal” implica em um canal funcionando bem; de forma que, determinado valor de capacidade de canal poderia indicar um bom funcionamento do organismo do indivíduo.

As IM encontradas para as diversas fases do sono para cada paciente estão expostas

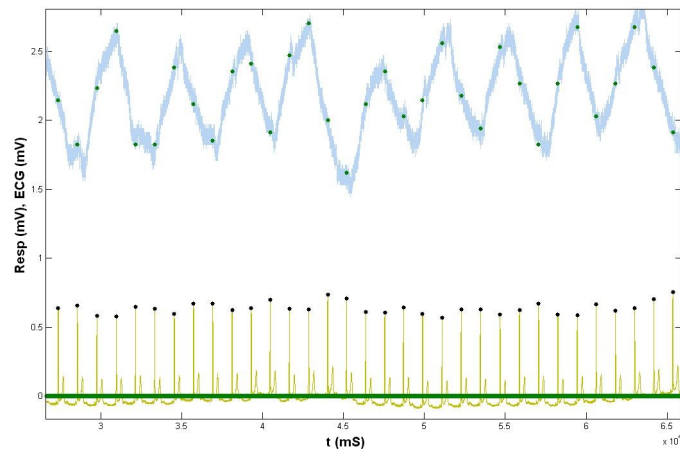


Figura 5.9: Cálculo da frequência cardíaca e amostragem do sinal da respiração.

nas figuras 5.10 , 5.11, 5.12, 5.13.

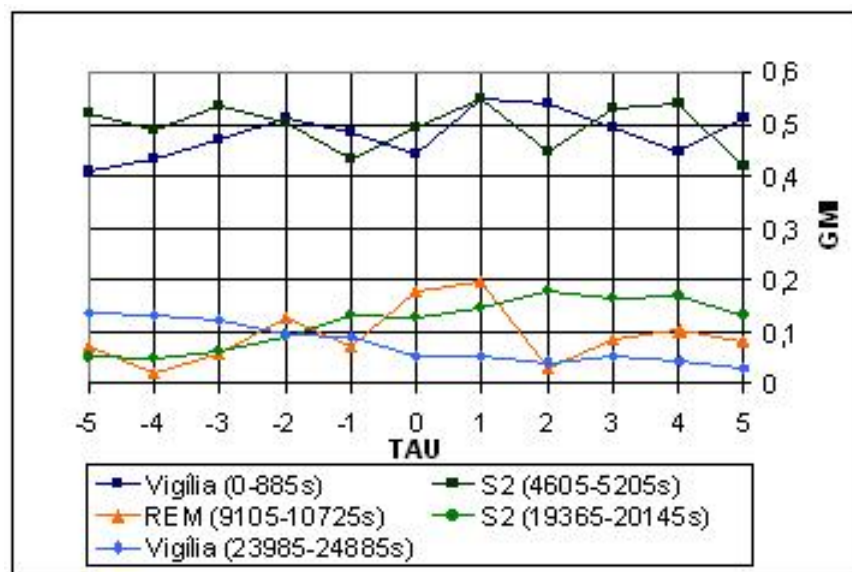


Figura 5.10: IM referente ao paciente1.

Descrição dos pacientes:

- Paciente1: Mulher, 27 anos, 56,3Kg, 1,54m e tempo total de sono de 366min;
- Paciente2: Mulher, 43 anos, 52,4Kg, 1,48m e tempo total de sono de 503min;
- Paciente3: Homem, 24 anos, 86,7Kg, 1,80m e tempo total de sono de 392min;



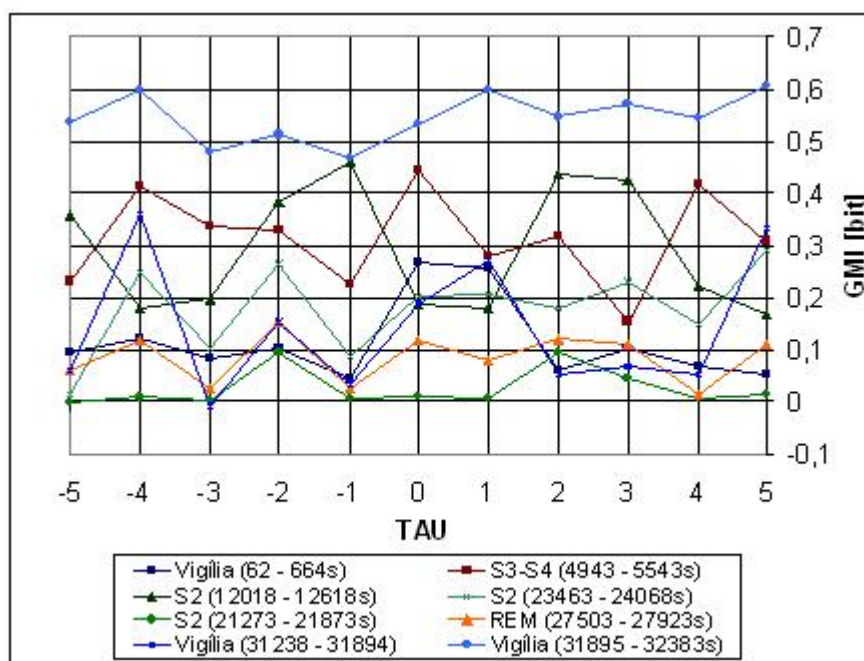


Figura 5.11: IM referente ao paciente2.

- Paciente4: Homem, 49 anos, 70,3Kg, 1,69m e tempo total de sono de 417min.

Devido a reduzida quantidade de dados, não é possível a realização de uma inferência estatística. Além deste fato, os dados apresentaram vários trechos bastante contaminados por ruído o que impossibilitou a realização de uma análise mais completa. Entretanto, os resultados obtidos revelam a grande potencialidade da ferramenta Informação Mútua como um possível marcador de eventuais disfunções fisiológicas.

Tais observações não levam a nenhuma conclusão clínica, mas especula-se que, por exemplo, pessoas mais velhas (paciente 2 e paciente 4) apresentam uma IM máxima maior; isso poderia ser entendido como uma necessidade dos dois sistemas estarem mais acoplados para permitir um bom funcionamento geral. Outra observação pode ser feita considerando o período de vigília e de sono. Na vigília, os sistemas parecem estar mais acoplados, ou seja, a alteração de um logo afeta o outro, mas no sono, os sistemas estão mais desacoplados.

Seria interessante se, neste estudo, tivessem sido tratados pacientes não-sadios, ou seja, com alguma patologia, para testarmos a IM como um indicador de eventuais disfunções fisiológicas. No entanto, esses foram os únicos dados cedidos pelo InCor que permitiram uma análise. Os dados são coletados, ainda, de maneira precária,

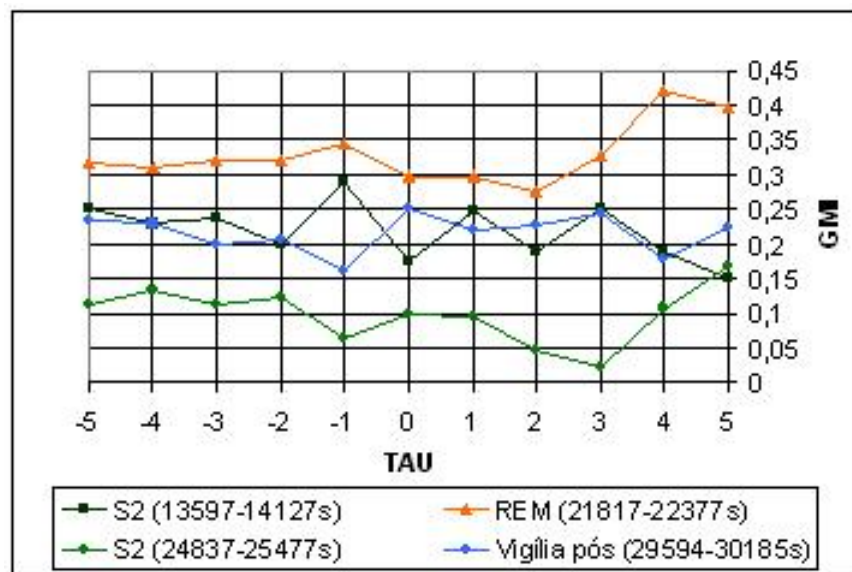


Figura 5.12: IM referente ao paciente3.

apresentando bastante ruído. Um estudo mais específico deve acompanhar todo o processo de coleta dos dados.

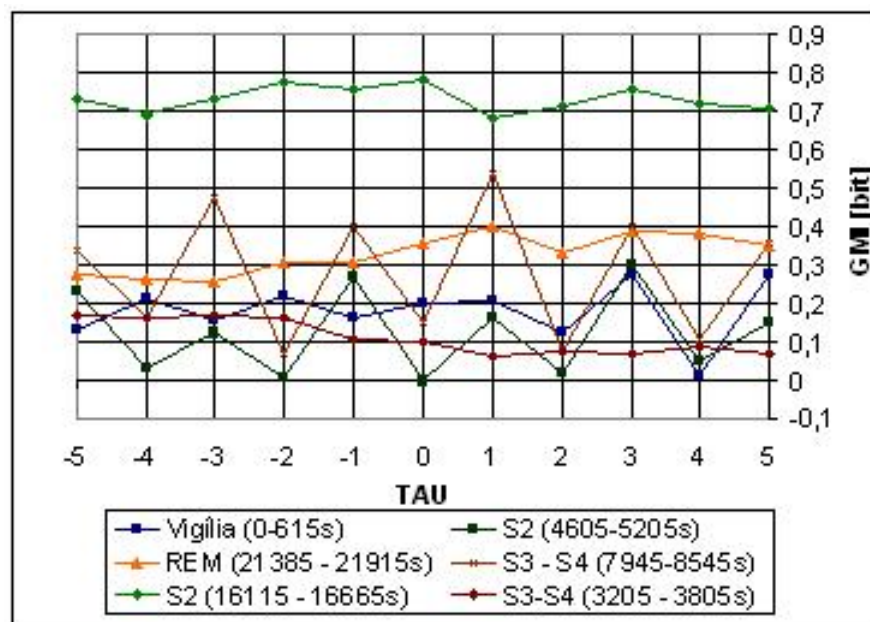


Figura 5.13: IM referente ao paciente4.

# Capítulo 6

## Conclusões

Nessa Dissertação, fez-se um breve estudo fisiológico do sistema cardiovascular e do sistema respiratório. Além deste, foram realizados estudos dos dois suportes metodológicos utilizados: a Teoria da Informação e os sistemas não-lineares. Mais precisamente, analisou-se e justificou-se a escolha da ferramenta estatística Informação Mútua, da Teoria da Informação, como uma medida do acoplamento entre dois sistemas e observou-se os diversos fenômenos específicos dos sistemas não lineares como também o comportamento de diferentes formas de acoplamentos entre osciladores de van der Pol.

- O principal enfoque deste trabalho foi a utilização da Informação Mútua para quantificar o acoplamento entre os dois sistemas: o cardiovascular e o respiratório.
- A principal contribuição dessa dissertação está na idéia de utilizar a capacidade de canal, ou seja, a Informação Mútua máxima entre os dois sistemas envolvidos como um possível indicador fisiológico e/ou fisiopatológico.
- No capítulo 5, fez-se primeiramente um estudo com osciladores de van der Pol acoplados e, logo em seguida, analisou-se os dados referentes aos sinais cardíacos e respiratórios de quatro pacientes do Instituto do Coração da Faculdade de Medicina da Universidade de São Paulo, onde a Informação Mútua foi utilizada para medir o possível acoplamento entre os sistemas.
- A quantidade reduzida de dados impossibilitou a realização de uma inferência

estatística. Além deste fato, os dados apresentaram vários trechos bastante contaminados por ruído, de forma que, não foi possível realizar uma análise mais completa.

- O estudo com os dados dos pacientes do Instituto do Coração da Faculdade de Medicina da Universidade de São Paulo, sugerem a grande potencialidade da ferramenta Informação Mútua como um possível marcador de eventuais disfunções fisiológicas.

## 6.1 Sugestões para futuros estudos

- Estudar como a informação mútua pode funcionar como marcador dos diversos estados de saúde do sistema cardiovascular (e possivelmente respiratório). Estes incluem a hipertrofia ventricular esquerda, a hipertensão (que poderia ser melhor caracterizada), as arritmias cardíacas, a síndrome metabólica, a complacência arterial, a insuficiência cardíaca, a fração de ejeção, a atividade elétrica do coração (todas as tensões do eletrocardiograma, o índice eletrocardiográfico de Cornell para a hipertrofia ventricular esquerda, etc.).
- Elaborar modelos matemáticos (sistemas de equações diferenciais) do sistema cardiorrespiratório, envolvendo também a atividade elétrica do coração.
- A partir de dados obtidos do ecocardiograma, do VOPmeter (velocidade de onda de pulso), da monitoração ambulatorial de 24 horas (MAPA-24h), do eletrocardiograma, da frequência e amplitude respiratória (espirometria) e exames bioquímicos (série bioquímica: colesterol, triglicerídios, glicemia, creatinina, etc.), buscar estabelecer protocolos efetivos, eficazes e eficientes (mais econômicos) para a avaliação do sistema cardiorespiratório.
- Desenvolver instrumentação para a medida da pressão arterial e da frequência cardíaca que leve em conta os desvios e interações da dinâmica cardiovascular.
- Conceber uma instrumentação cardiovascular respiratória integrada que possa ser usada em centros diagnósticos.

# Referências

- [1] GUYTON, A. C. (1989) “Tratado de fisiologia médica”, Editora Guanabara, 7a ed., Rio de Janeiro.
- [2] WANDERLEY, A. L. (2005) “Sobre a Dinâmica do Sistema Cardiovascular”, Dissertação, Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Recife.
- [3] LESSA, P. S. (1996) “Incertezas na medida da pressão arterial”, Dissertação, Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Recife.
- [4] MONTE, A. (2002) “Modélisation et analyse des rythmes dans les systèmes respiratoire et cardiovasculaire”, Tese, Université Paris XI, Paris.
- [5] —, Site: [http://estudmed.com.sapo.pt/fisiologia/sistema respiratório 1.htm](http://estudmed.com.sapo.pt/fisiologia/sistema_respiratorio_1.htm), em 15/02/2006.
- [6] —, Site: <http://www.afh.bio.br/cardio>, em 05/01/2006, às 16h30.
- [7] —, Site: <http://www.geocities.com/CollegePark/Lab/9707/respiratorio.html>, em 05/01/2006.
- [8] —, Site: <http://www.virtual.epm.br/material/tis/curr-bio/trab2003/g3/fisiologia.html>, em 07/01/2006.
- [9] ABRAMSON, N. (1963) “Information Theory and Coding”, McGraw-Hill, New York.
- [10] SHANNON, C.E. (1948) “A Mathematical Theory of Communication”, Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp. 379-423, pp. 623-656.

- [11] HARTLEY, R.V.L. (1928) “Transmission of information”, Bell System Technical Journal, Vol. 3, pp. 535-564.
- [12] MASSEY, J. L. (1997) “Applied Digital Information Theory I”, Notas de leitura não publicadas.
- [13] POMPE, B. e HEILFORT, M. (1995) “On the Concept of the Generalized Mutual Information Function and Efficient Algorithms for Calculating it”, não publicado.
- [14] POMPE, B. (1993) “Measuring statistical dependencies in a time series”, J. Stat. Phys. 73, 587-610.
- [15] HOYER, D., LEDER, U., HOYER, H., POMPE, B., SOMMER, M., ZWIENER, U. (2002) “Mutual information and phase dependencies: measures of reduced nonlinear cardiorespiratory interactions after myocardial infarction”, Medical Engineering & Physics 24, 33-43.
- [16] DIONISIO, A., MENEZES, R. e MENDES, D. (2003) “Mutual information: a dependence measure for nonlinear time series”, Economics Working Paper Archive at WUSTL, series Econometrics, number 0311003 73.
- [17] POMPE, B., BLIDH, P., HOYER, D. e EISELT, M. (1998) “Using Mutual Information to Measure Coupling in the Cardiorespiratory System”, Engineering in Medicine and Biology Magazine, IEEE, Vol. 17, Issue 6, pp. 32-39.
- [18] JEONG, J., GORE, J.C. e PETERSON, B.S. (2001) “Mutual information analysis of the EEG in patients with Alzheimer’s disease”, Clinical Neurophysiology 112, pp. 827-835.
- [19] POMPE, B. (1998) “Ranking and Entropy Estimation in Nonlinear Time Series Analysis” in Nonlinear Analysis of Physiological Data, H. Kantz, J. Kurths, and G. Mayer-Kress, Eds., Springer Series for Synergetics.
- [20] POMPE, B. (2002) “Mutual Information and Relevant Variables for Predictions” in Modelling and Forecasting Financial Data: Techniques of Nonlinear Dy-

- namics. Abdol S. Soofi and Liangyue Cao (eds.), Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [21] STROGATZ, S. H. (1998) “Nonlinear Dynamics and Chaos”, Perseus Books.
- [22] Monteiro da Silva, G. V. (2003) “Controlo não linear”, Escola Superior Tecnologia Setúbal, Lisboa.
- [23] VAN DER POL, B., VAN DER MARK (1928) “Le battement du coeur considéré comme oscillation de relaxation”, *Onde Electrique*, Vol.7, PP. 365-392.
- [24] GILLE, J. C., DECAULNE, P., PELEGRIN, M. (1960) “Méthodes modernes d'étude des systèmes asservis”, Dunod, Paris.
- [25] WANG, W., SLOTINE, J. J. E. (2004) “On partial contraction analysis for coupled nonlinear oscillators”, *Biological Cybernetics*, 92(1).
- [26] DIAZ, I. P., FRAGUAS, A. L. (1995) “Dynamics of two coupled van der Pol oscillators”, *Physical Review E*, Vol. 52, N°2, pp. 1480-1489.
- [27] PANTALEONE, J.(2002) “Synchronization of metronomes”, *Am. J. Phys.*, Vol. 70 (10), pp. 1-9.
- [28] PIKOVSKY, A., ROSENBLUM, M., KURTHS, J., “Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences”, Cambridge University Press.
- [29] BOWIE, A. (2004) “Entrainment”.
- [30] CAMACHO, E., RAND, R., HOWLAND, H.(2004) “Dynamics of two van der Pol oscillators coupled via a bath”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 2133-2143.
- [31] SANTOS, A. M., LOPES, S. R., VIANA, R. L.(2003) “Rhythm synchronization and chaotic modulation of coupled van der Pol oscillators in a model for the heartbeat”, *Physica A*, Vol. 338, pp. 335-355.
- [32] WIRKUS, S., RAND, R.(2002) “The Dynamics of Two Coupled van der Pol Oscillators with Delay Coupling”, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 30, pp. 205-221.



- [33] HIRANO, N., RYBICKI, S.(2006) “Existence of limit cycles for coupled van der Pol equations”
- [34] STEFANOVSKA, A.(2002) “Cardiorespiratory interactions”, *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, Vol. 5:4, pp. 462-469.
- [35] SCHAFER, C., ROSENBLUM, M. G., ABEL, H. H., KURTHS, J. (1999) “Synchronization in the human cardiorespiratory system”, *Physical Review E*, Vol. 60, N°1, pp. 857-870.
- [36] SCHAFER, C., ROSENBLUM, M. G., ABEL, H. H., KURTHS, J.(1998) “Heartbeat synchronized with ventilation”, *Nature*, Vol. 392, N°6673, pp. 239-240.
- [37] LOTRIC, M. B., STEFANOVSKA, A.(2000) “Synchronization and modulation in the human cardiorespiratory system”, *Physica A*, Vol. 283, pp. 451-461.